Esercizî di Geometria (Petronio 09/10)

4 marzo 2010

Esercizio 1. Calcolare l'angolo formato dai vettori v e w assegnati nello spazio euclideo standard di dimensione oppurtuna:

(a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Verificare che nello spazio $C^0([0,1],\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ i vettori S e C dati da

$$S(t) = \sin(2\pi t) \qquad C(t) = \cos(2\pi t)$$

sono ortogonali tra loro e hanno la stessa norma, trovandone il valore.

Esercizio 3. Calcolare l'angolo formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nello spazio $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\,({}^{t}B \cdot A)$.

Esercizio 4. Nello spazio $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ dotato del prodotto scalare

$$\langle p(t)|q(t)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

determinare un polinomio di norma $\sqrt{5}$ ortogonale a $1+t$ e a $1+t^2$.

Esercizio 5. Stabilire per quali delle matrici A assegnate si ha che $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è un prodotto scalare:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{\pi} \\ 5 & 3 & -1781 \\ \sqrt{\pi} & -1781 & e \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

(h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Nello spazio $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con A assegnata determinare una base del sottospazio ortogonale rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ ai vettori indicati:

(a) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

(c) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$