3a) Usando la formula

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i},$$

Siccome $\left|\frac{1+\sqrt5}{2}\right| > \left|\frac{1-\sqrt5}{2}\right|$, e ≥ 1 sappiamo che $x_n \geq 0$ $\forall n$.

Scriviamo

$$x_n = \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2} - \frac{1-\sqrt5}{2}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^i\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1-i} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}(1+\sqrt5)^i(1-\sqrt5)^{n-1-i}$$

A seconda se n è pari o dispari, possiamo riscrivere la sommatoria come

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+\sqrt5)^i(1-\sqrt5)^{n-1-i} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1}\left[(1+\sqrt5)^j(1-\sqrt5)^{n-1-j} + (1+\sqrt5)^{n-1-j}(1-\sqrt5)^j\right] + \left((1+\sqrt5)(1-\sqrt5)\right)^k, & n=2k+1 \\ \sum_{j=0}^{k-1}\left[(1+\sqrt5)^j(1-\sqrt5)^{n-1-j} + (1+\sqrt5)^{n-1-j}(1-\sqrt5)^j\right], & n=2k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1}\left((1+\sqrt5)(1-\sqrt5)\right)^j\left[(1-\sqrt5)^{n-1-2j} + (1+\sqrt5)^{n-1-2j}\right] + (-1)^k 2^{2k}, & n=2k+1 \\ \sum_{j=0}^{k-1}\left((1+\sqrt5)(1-\sqrt5)\right)^j\left[(1-\sqrt5)^{n-1-2j} + (1+\sqrt5)^{n-1-2j}\right], & n=2k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j 2^{2j}\left[(1-\sqrt5)^{n-1-2j} + (1+\sqrt5)^{n-1-2j}\right] + (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}, & n=2k+1 \\ \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j 2^{2j}\left[(1-\sqrt5)^{n-1-2j} + (1+\sqrt5)^{n-1-2j}\right], & n=2k, \end{cases}$$

e basta dimostrare che ognuna delle somme

$$(1-\sqrt5)^{n-1-2j} + (1+\sqrt5)^{n-1-2j}$$

è un numero ~~naturale~~ intero divisibile per 2^{n-1-2j}.

Dimostriamo per induzione che $\forall\, m \in \mathbb{N}$
$(1-\sqrt{5})^m + (1+\sqrt{5})^m$
è un numero intero divisibile per 2^m

Aff. $P(m)$

Passo base

Se $m = 1$ abbiamo

$$1-\sqrt{5} + 1+\sqrt{5} = 2$$

Passo induttivo

Supponiamo che l'affermazione valga per tutti $1 \leq m \leq a-1$ ~~qualche base~~ e ne deduciamo che essa valga anche per $m=a$. Scriviamo

$$2\cdot\left[(1-\sqrt{5})^{a-1} + (1+\sqrt{5})^{a-1}\right] = \left((1-\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})\right)\left((1-\sqrt{5})^{a-1} + (1+\sqrt{5})^{a-1}\right) =$$

$$= (1-\sqrt{5})^a + (1+\sqrt{5})^a + (1-\sqrt{5})^{a-1}(1+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})^{a-1}(1-\sqrt{5}) =$$

$$= (1-\sqrt{5})^a + (1+\sqrt{5})^a - 4\left[(1-\sqrt{5})^{a-2} + (1+\sqrt{5})^{a-2}\right].$$

Dunque

$$(1-\sqrt{5})^a + (1+\sqrt{5})^a = \underbrace{2\cdot\left[(1-\sqrt{5})^{a-1} + (1+\sqrt{5})^{a-1}\right]}_{\in\mathbb{Z},\ \text{divisibile per } 2^{a-1}} + 4\cdot\underbrace{\left[(1-\sqrt{5})^{a-2} + (1+\sqrt{5})^{a-2}\right]}_{\in\mathbb{Z},\ \text{divisibile per } 2^{a-2}}$$

Per ~~supposizione~~ ipotesi induttiva

Dunque $(1-\sqrt{5})^a + (1+\sqrt{5})^a$ è la somma di due numeri interi ognuno di cui è divisibile per 2^a $\Rightarrow$ lo stesso vale anche per la somma. Ciò conclude il passo induttivo, dunque $P(m)$ è valida $\forall\, m \in \mathbb{N}$, e ne concludiamo che x_n è intero.

3b).

Per induzione.

Per il passo base verifichiamo ~~che~~ l'uguaglianza $x_n = f_n$ per $n=0$ e per $n=1$.

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^0\right) = \frac{1}{\sqrt5}(1-1) = 0 = f_0$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2} - \frac{1-\sqrt5}{2}\right) = 1 = f_1.$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ generico e supponiamo che $\forall\, m \leq n$ $x_m = f_m$. Vogliamo dimostrare che $x_{n+1} = f_{n+1}$

Si ha

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi} \\ \text{induttiva}}}{=} \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1} - \left[\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\right]\right)$$

Siccome abbiamo

$$1 + \frac{1+\sqrt5}{2} = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{moltiplicando}}}{\Rightarrow} \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1},$$

$$1 + \frac{1-\sqrt5}{2} = \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n = \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1},$$

$\forall n \geq 1$

concludiamo

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right) = x_{n+1},$$

come voluto.