"Geometria" – Esercizi del 28/5/09

(1) Calcolare $\int_\alpha f$ dove $f(x,y) = \sqrt{1+y^2}$

e $\alpha(t) = (t, e^t)$, $t \in [0,1]$

(2) $y \sin(x)\, dx + (\cos(y) - \cos(x))\, dy$ è chiusa?

(3) $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(1 + x \cdot \cos(y)) + \cos(x) = 1\}$.

Verificare che $(0,0) \in C_1$ e dire se $(1,1)$ sia tangente a C_1 in $(0,0)$.

(4) In quali condizioni su f la forma $\omega = f(x,y)\, dx$ è chiusa?

(5) Calcolare l'area delimitata da $\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ $t \in [0, 2\pi]$ e dall'asse delle ascisse.

(6) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto limitato, è vero che $\int_{\partial A} df = 0$?

(7) Se $Q = [0,1] \times [0,1]$ calcolare

$$\int_{\partial Q} \left((x^2+y^2)\, dx + (2xy + e^x)\, dy \right)$$

(8) Quale è più lunga tra

$$\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2) \qquad t \in [0, 2\pi]$$
$$\beta(t) = (\sin(2t), \cos(2t), 4t^2) \qquad t \in [0, \pi] \qquad ?$$

(9) Se ω_0 e ω_1 sono forme su $\mathbb{R}^2$ e $d\omega_0 = d\omega_1$ si conclude che $\omega_0 = \omega_1$?

(10) Per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma

$$(x + ky^2)\,dx + (xy - k^2 y^2)\,dy$$

ha un potenziale su $\mathbb{R}^2$?

(11) Calcolare $\int_\alpha 3\sqrt{1+x^2+y^2}$

$$\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t) \qquad t \in [0,1]$$

(12) Calcolare $d(x^2 y^3)$

(13) Calcolare $\int_\alpha \omega$ dove

$$\alpha(t) = \left(t, \sin\frac{t^2}{\pi}, t(t-\pi)\right)$$
$$\omega = \cos(y)(dx + dz) - [\sin(y)](x+z)\,dy$$

(14) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 = x \cdot \cos(x+y)\}$.

Esistono punti nei quali $(-2,0)$ è ortogonale a C ?

(15) $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ curva

tale che $\begin{pmatrix} f(\gamma(t)) \\ g(\gamma(t)) \end{pmatrix} \perp \gamma'(t) \quad \forall t.$

Ne segue che $\displaystyle\int_\gamma f\,dx + g\,dy = 0$?

(16) Calcolare $\displaystyle\int_{\partial D} \left(\cos(e^y)\,dy - y\,dx\right)$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$

(17) Calcolare $\displaystyle\int_{\partial A} (-y\,dx)$

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 , \ 0 \leq y \leq 1 + x^2 \}$

(18) Calcolare $\displaystyle\int_\alpha x$ dove $\alpha(t) = (t, t^2)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$

(19) Parametrizzare ∂A con la giusta orientazione,

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4 \}$

(20) Calcolare $\displaystyle\int_\alpha x \cdot y$ $\quad \alpha(t) = (\sin t, 2\cos t)$ $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$