"Geometria" - Esercizi del 27/03/09

Trovare le formule

(1) delle seguenti isometrie di $\mathbb{R}^n$:

(a) rotazione di angolo $\frac{\pi}{12}$ del piano $\mathbb{R}^2$ intorno all'origine;

(b) rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ del piano $\mathbb{R}^2$ intorno al punto $(2;2)$;

(c) riflessione di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla retta $x+2y=0$;

(d) riflessione di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla retta $x-3y+1=0$;

(e) rotazione di $\mathbb{R}^3$ di angolo $\frac{\pi}{4}$ intorno alla retta $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

(f) rotazione di $\mathbb{R}^3$ di angolo $\frac{\pi}{3}$ intorno alla retta $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$

(g) riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano $x-2y+3z=0$.

(2) Dire se le seguenti matrici siano normali; in tal caso se siano unitarie, (discutendo al variare di $k \in \mathbb{C}$ quando presente).

(a) $\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1-2i & 3i \\ -4i & 1+5i \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5i & -4i \\ 6i & -5i \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \frac{1+5i}{\sqrt{2}} & -2i \\ 6i & \frac{1-5i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1+i & 5 & 2-i \\ 3 & 2-3i & 1 \\ 5 & 1-i & 3-i \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} \frac{3+4i}{5} & -8i & -3-4i \\ 0 & \frac{3-4i}{5} & 0 \\ 3+4i & -40i & -14-20i \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 7+12k & 0 & -2-4k \\ 0 & 3-4k & 0 \\ 12+24k & 0 & -3-8k \end{pmatrix}$

(3) Stabilire se le seguenti matrici siano normali e in tal caso esibire una matrice unitaria che le diagonalizzi:

(a) $\begin{pmatrix} 1-5i & -6i \\ 3i & 1+4i \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5-12i & -3+15i \\ 2-10i & 13i \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4-i & -14+i \\ 12-3i & -40+4i \end{pmatrix}$

(4) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità delle seguenti matrici:

(a)
$$\begin{pmatrix} 2k^2-2k-1 & -2k-1 \\ -2k^2+3k+2 & 3k+2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & k-4 & 1 \\ k-2 & 2k-1 & 1-k \\ 2(k-2) & -4 & 3 \end{pmatrix}$$