"Geometria" - Esercizi del 20/3/09

(1) Trovare gli autovalori delle seguenti matrici o applicazioni lineari e dire se sono o meno diagonalizzabili (su $\mathbb{C}$ e/o ~~[illegible]~~, su $\mathbb{R}$ {a seconda di quando ha senso} o come specificato) discutendo al variare di k quando presente):

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $f : \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \circlearrowleft$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(d) $f : \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\} \circlearrowleft$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \\ x_1 + \frac{2}{5}x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

(e) $$\begin{pmatrix} 2i & 3+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) $$\begin{pmatrix} 2+3i & 2i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

(g) $$\begin{pmatrix} -i & 6i-1 & -1-i \\ 2 & i & 2 \\ 1+2i & 1-i & 2+2i \end{pmatrix}$$

(h) $$\begin{pmatrix} 1+4i & -2 & 2+4i \\ 7 & 2i & 7 \\ 1-i & 2-i & -i \end{pmatrix}$$

(i) $$\begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 1+k & 2-k & 0 \\ -3 & k & 2+k \end{pmatrix}$$

(j) $$\begin{pmatrix} k^2+2 & k^2+1 & -k^2+k-1 \\ 1-k & k & k-1 \\ 2 & k^2+1 & k-1 \end{pmatrix}$$

(2) Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dimostrare che sono fatti equivalenti:

(a) A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

(b) A ha autovalori reali ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

(3) Esibire una base che diagonalizza le seguenti matrici o applicazioni lineari:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}_{\leq 1}[t] \circlearrowleft$

$f(p(t)) = p(t+1) \cdot t + 2\, p'(t)$

(c) $f : \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \circlearrowleft$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$