"Geometria" — Esercizi del 3/3/09

(1) (Determinante di Vandermonde)

Provare che se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ allora

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Dedurne che $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste uno e un solo polinomio di grado al più $n-1$ che in n punti assegnati assume valori dati ("interpolazione polinomiale"), ovvero: dati $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$ esiste unico $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq n-1}[x]$ t.c. $p(x_i) = y_i$ per $i = 1, \dots, n$.

(2) Stabilire se le seguenti applicazioni siano bilineari, in tal caso se siano simmetriche, e in tal caso se siano definite positive:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 5x_1y_2 + 4y_1y_2 - 3x_2y_1$$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 3x_1y_2 - 2x_1y_1 + 7x_2y_1 - 9x_2y_2$$

(c) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = -2x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 + 3x_2y_2$$

(d) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1y_1 + 4x_2y_2 \\ -x_1y_2 + 5x_2y_1 \end{pmatrix}$$

(e) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 7x_1y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}$$

(f) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$$

(g) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 4x_1y_1 - 3x_2y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_2$$

(h) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 4x_1y_2 - 3x_2y_3 + 2x_1$$

(g) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_3y_3$$

(h) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 2x_3y_3$$

(i) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

(3) Data $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sia $\tilde{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ definita da $(\tilde{A})_{ij} = (-1)^{i+j}(A)_{ij}$. Verificare che $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\tilde{A}}$ è definita positiva se e solo se lo è $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

(4) Determinare la matrice associata alle seguenti applicazioni bilineari rispetto alla base canonica oppure rispetto alla base $\mathcal{B}$ indicata:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 3x_1y_1 - 5x_1y_2 + 7x_2y_2$$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(c) $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}$

$$f(p(t), q(t)) = \int_{-1}^{2} p(\tau) \cdot q(\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{B} = (1, t, t^2)$$

(d) $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(p(t), q(t)) = \left(p(1) + p'(-1)\right) \cdot \left(q(-1) + q'(1)\right)$$

$$\mathcal{B} = \left(1+t,\ 1+t^2,\ 2t - t^2\right)$$

(e) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 - 3 x_2 y_2 + 5 x_1 y_3 + 5 x_3 y_1 + 2 x_3 y_3$$