Algebra lineare – Esercizi del 27/11/08

Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

(1) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -9 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -8 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Determinare la segnatura delle seguenti permutazioni:

(4) $(2\,1\,5\,3\,4) \in \mathfrak{S}_5$ $(4\,3\,1\,5\,2) \in \mathfrak{S}_5$

(5) $(5\,2\,4\,3\,6\,1) \in \mathfrak{S}_6$ $(2\,6\,5\,3\,1\,4) \in \mathfrak{S}_6$

(6) $(2\,3\,4\,1) \in \mathfrak{S}_4$ $(2\,3\,4\,5\,1) \in \mathfrak{S}_5$ $(2\,3\,4\,5\,6\,1) \in \mathfrak{S}_6$

(7) $(4\,7\,1\,2\,6\,3\,5) \in \mathfrak{S}_7$ $(6\,2\,3\,1\,5\,7\,4) \in \mathfrak{S}_7$

Data $A = (v_1, \dots, v_n) \in M_{n \times n}$ determinare $\det(B)$ in funzione di $\det(A)$:

(8) $n = 2$ $B = (2v_1 - v_2\,,\ 4v_1 + 3v_2)$

(9) $n = 3$ $\quad B = (v_1 - 2v_3, 2v_2 + 3v_3, -v_1 + 3v_3)$

(10) $n = 3$ $\quad B = (v_1 + 2v_2 + 5v_3, -v_2 + 4v_3, 3v_3)$

(11) $n = 3$ $\quad B = (2v_1 - v_2 + v_3, v_2 - 3v_1, 4v_3 - 3v_1)$

(12) $n = 4$ $\quad B = (v_2 + 2v_4, v_2 - 3v_1, 2v_1 + v_3, v_1 - v_3 + 2v_4)$

Usando il determinante stabilire se le seguenti applicazioni lineari sono invertibili:

(13) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_2 + 4x_2 \end{pmatrix}$

(14) $f : \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

(15) $f : \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = x_2 + x_4\} \to \mathbb{R}^3$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

(16) $f : \mathbb{R}^3 \to \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ -6x_1 - 3x_2 - 9x_3 \end{pmatrix}$$

(17) $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \circlearrowleft$

$$f(p(t)) = p(1) + (p'(-1) + p(-1))t + 2tp'(t)$$