# Algebra Lineare - Esercizi del 17/12/08

1) Data $f: V \to W$ lineare di rango $r$ ~~posto~~ provare che esistono basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tali che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Data $f: V \to V$ lineare e $W \subset V$ sottosp. tale che $f(W) \subset W$, definita $g: W \to W$ come $g(w) = f(w)$ $\forall w \in W$, provare che $p_g(t)$ divide $p_f(t)$.

3) Provare che $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ha almeno un autovalore reale e che se gli altri due non sono reali $A$ è coniugata a una matrice del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$.

4) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ discutere la diagonalizzabilità di

$$A_k = \begin{pmatrix} 41k - 39 & 56(k-1) \\ 30(1-k) & 43 - 41k \end{pmatrix}$$

$$B_k = \begin{pmatrix} 2(3k^2+k-8) & -3(5k^2+2k-16) \\ 2k^2+k-6 & -5k^2-3k+18 \end{pmatrix}$$

$$C_k = \begin{pmatrix} 3+k-2k^2 & 4+k & -3-k+3k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 2+k-2k^2 & 3+2k & -2-k+3k^2 \end{pmatrix}$$

$$D_k = \begin{pmatrix} 4 & 2k+4 & 3k+6 \\ 3 & -2k^2 & -3k(k+1) \\ -2 & 2k^2 & k(3k+2 \end{pmatrix}$$

$$E_k = \begin{pmatrix} k^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ k^2+k & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-1 & k^2-4 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix}$$