Algebra lineare – Esercizi del 2/10/08

(1) Dimostrare che ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, è prodotto di numeri primi.

(2) Dimostrare la regola di divisione euclidea: dati $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$ esistono unici $q, r \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq r < m$ tali che $n = q \cdot m + r$.

(3) Posto $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per $n \geq 2$

e $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

- verificare direttamente che $x_n \in \mathbb{N}$ $\forall n$
- dimostrare che $x_n = f_n$

(4) Provare che

- $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(verificando preliminarmente che i membri destri appartengono a $\mathbb{N}$)

(5) Se $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$

trovare u, v tali che

$F \cap G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : u(x,y) = 0\}$

$F \cup G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : v(x,y) = 0\}$

(6) Dimostrare la regola di divisione tra polinomi : dati $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $\deg(g(x)) > 0$ esistono unici $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $0 \leq \deg r(x) < \deg g(x)$ e $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$.

(7) Verificare che $D = \{0,1\}$ con le operazioni $+, \cdot$

$0+0 = 1+1 = 0 \qquad 0+1 = 1+0 = 1$

$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$

è un campo.