



 Matematica III — Scritto del 29/05/04 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Calcolare $\int_{\alpha} xy$ dove $\alpha(t) = (2 \cos t, \sqrt{3} \sin t)$, per $t \in [0, \pi/2]$.

2. Siano $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\}$.

È vero che se $\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| > 0$ su S allora S è una superficie? È vero il viceversa?

3. Trovare i punti stazionari in $\mathbb{R} \times [0, \pi/2]$ del sistema autonomo $\begin{cases} x' = x \cos y \\ y' = (x + 1) \sin y \end{cases}$ ed indagarne la natura.

4. Risolvere $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$, $a_0 = 5$, $a_1 = 0$.

5. Sia $f(t) = t^2$ per $t \in [0, \pi]$ e $f(t) = -t^2$ per $t \in [-\pi, 0]$.
Calcolare i coefficienti di Fourier reali $a_1(f)$ e $b_1(f)$.

6. Se $\mathcal{F}(f)(t) = t^2 e^{-t^2}$ e $\mathcal{F}(g)(t) = t^3 e^{-|t|}$, quanto fa $\mathcal{F}(f * g)(t)$?

7. La soluzione di $x' = x^4 - 2x^2t + t^2$, $x(0) = 0$ è definita su tutto $[0, +\infty)$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1 + z)^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

(A) (2 punti) Mostrare che S è una superficie e trovarne una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Calcolare il volume di $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (1 + z)^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

(C) (3 punti) Sia $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx dz + \frac{x}{x^2+y^2} dy dz + z dx dy$. Calcolare $d\omega$.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_S \omega$.

2. Sia $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{z(z^3+1)}$.

(A) (3 punti) Trovare i poli di f e calcolare i relativi residui (lasciando indicate le esponenziali che non si sanno calcolare esattamente).

Per $z, w \in \mathbb{C}$ sia $[z, w]$ il segmento che li congiunge. Per $r > 0$ sia $A_r = \{r e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi/2]\}$. Per $0 < r' < 1 < r''$ sia $C(r', r'') = [r', r''] \cup A_{r'} \cup [ir', ir''] \cup A_{r''}$.

(B) (3 punti) Per ogni $0 < r' < 1 < r''$ provare che esiste una curva chiusa $\alpha(r', r'')$ che ha supporto $C(r', r'')$ e calcolare $\int_{\alpha(r', r'')} f(z) dz$.

(C) (3 punti) Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(z) \geq 0$ e $\Im(z) \geq 0$ si ha $|f(z)| \leq \frac{1}{|z||z^3+1|}$.
Dedurre che $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A_r} f(z) dz = 0$.

(D) (3 punti) Mostrare che $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_r} f(z) dz = i\pi/2$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



Risposte esatte

5. \diamond

1. $16/\sqrt{3} - 6$
2. Sì, per il teorema del Dini. Il viceversa no: $f(x) = x_3$.
3. $(0, 0)$ repulsivo, $(-1, \pi/2)$ di sella
4. $2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n$
5. $a_1(f) = 0$, $b_1(f) = 2\pi - 8/\pi$
6. $t^5 e^{-(t^2+t)}$
7. Sì, resta dentro la parabola $t = x^2$

1. \heartsuit 2. \clubsuit 3. \spadesuit 4. \diamond 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \spadesuit 8. \diamond 9. \clubsuit 10. \heartsuit
