UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 19/06/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Calcolare $\int_R \operatorname{div}(v)$ dove $R = [0, \pi] \times [0, 1]$ e $v(x, y) = (\sin(x), y\cos^2(x))$.

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato tale che $\partial\Omega$ sia una superficie. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con bordo, contenuta in $\partial\Omega$. Ne segue che Σ è orientabile?

3. Trovare massimo e minimo di $x + z$ sotto i vincoli $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e $x^2 = y^2 + z^2$.

4. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 2, \ |x| \leqslant 1\}$. Calcolare $\int_S (y \, dx \, dz + x \, dy \, dz)$.

5. Per quali n possono differire due soluzioni di $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^6$ che coincidono per $n = 0$ e per $n = 2$?

6. Siano $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nt)$ e $F(t) = \int_0^t f(s) \, ds$. Calcolare la serie di Fourier di F.

7. Se $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ e $\mathcal{L}(f)(z)$ esiste per $\Re(z) > 1$, come si calcola $f(x)$ in funzione di $\mathcal{L}(f)$?

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 19/06/04 — Esercizî

1. Si consideri il problema

$$\begin{cases} 3\,\mathrm{e}^t x^2 x' - 4t^3 + \mathrm{e}^t x^3 = 0 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Si trovi il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ formato dai punti (t_0, x_0) per cui il problema è equivalente a un problema di Cauchy.

(B) (2 punti) Si dimostri che esiste $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che se x è una soluzione dell'equazione differenziale allora la funzione $\varphi(t) = f(t, x(t))$ è costante.

(C) (5 punti) Fissati (t_0, x_0) in Ω si trovi la soluzione massimale specificandone il dominio.

(D) (3 punti) Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$ con $x_0 < 0$. Si dimostri che la soluzione massimale del problema ha esattamente un punto di minimo interno.

2.

(A) (3 punti) Sia $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tale che $\varphi(z+1) = \varphi(z)$ e $\varphi(z+i) = \varphi(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Sia $Q = \{z \in \mathbb{C} : \ -1 < \Re(z) < 1, \ -1 < \Im(z) < 1\}$. Si verifichi che esiste $z_0 \in Q$ tale che

$$|\varphi(z_0)| = \sup_{z \in Q} |\varphi(z)|.$$

(B) (3 punti) Sia φ come nel punto (A). Si verifichi che φ è costante.

(C) (3 punti) Siano $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, d un intero, e $p(z), q(z)$ polinomi di grado al più d tali che $f(z+1) = f(z) + p(z)$ e $f(z+i) = f(z) + q(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si mostri che f è un polinomio di grado al più $d+1$.

(D) (3 punti) Sia $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tale che $\psi(z + 2\pi i) = \psi(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si mostri che esiste $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ tale che $\psi(z) = g(\,\mathrm{e}^z)$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 19/06/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\pi/2$

2. Sì, lo è $\partial\Omega$

3. 2 e -2

4. 2π

5. Al più per $n = 1$

6. $F(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin(nt)$

7. $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re(z)=c} \mathrm{e}^{zx} \mathcal{L}(f)(z)\, \mathrm{d}z$ per $c > 1$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$