UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 10/07/04 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Calcolare $\int\limits_{Q} \mathrm{d}\omega$ dove $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$ e $\omega(x,y) = \sin y\,\mathrm{d}x + \cos x\,\mathrm{d}y$.

2. Sia $u(x,y) = (x\cos x - y\sin x)\,\mathrm{e}^{-y}$. Trovare v tale che $u + iv$ sia olomorfa.

3. Calcolare $\int\limits_{\partial\Delta(i,2)} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-2i)(z+1)(z+2)}$.

4. Sia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0,i\})$ avente poli in 0 e in i.
Dove converge lo sviluppo di f in serie di Laurent centrato in i?

5. Sia $x : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ continua e $S_N(x)$ la sua N-esima approssimazione di Fourier.
È sempre vero che $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x - S_N(x)|^2 \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|^2$?

6. Se $g(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ è olomorfa per $0 < |z| < 2$, come si calcolano i b_n in funzione di g?

7. Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = x\}$. Calcolare $\int\limits_{S} \langle n | \mathrm{rot}(v) \rangle$ dove n è la normale a S avente terza coordinata positiva, e $v(x,y,z) = (-y, z, x)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 10/07/04 — Esercizî

1. Siano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leqslant 1, \ z = 2\cosh(1) - \cosh(\sqrt{x^2+y^2})\}$ e $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo $v(x,y,z) = (\,\mathrm{e}^{-y}(y\,\mathrm{e}^x+1), -x\,\mathrm{e}^{x-y}, -z(x+y)\,\mathrm{e}^{x-y})$

(A) (2 punti) Si mostri che S è una superficie e se ne trovi una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Si calcoli l'area di S.

(C) (3 punti) Sia $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 1, \ 0 \leqslant z \leqslant \cosh(1)\}$ e $\nu(x,y,z) = (x,y,0)$. Si calcoli

$$\int_C \langle v|\nu\rangle.$$

(D) (4 punti) Sia n il campo normale su S con terza coordinata positiva. Si calcoli

$$\int_S \langle v|n\rangle.$$

2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \operatorname{arctg} t + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Sia (a,b) l'intervallo massimale di definizione della soluzione. Si dica se $a > -\infty$ e se $b < +\infty$.

(B) (3 punti) Si calcolino, se esistono

$$\lim_{t\to a} x(t), \qquad \lim_{t\to b} x(t).$$

(C) (3 punti) Si mostri che x non ha punti di massimo locale.

(D) (3 punti) Si mostri che x ha un punto di minimo locale.

Matematica III — Scritto del 10/07/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\heartsuit$

1. -2π

2. $v(x,y) = (x\sin x + y\cos x)\,\mathrm{e}^{-y}$

3. $2\pi i \left(\left.\frac{z}{(z+1)(z+2)}\right|_{z=2i} + \left.\frac{z}{(z-2i)(z+2)}\right|_{z=1} \right) = \pi(1+i)$

4. Per $0 < |z-i| < 1$

5. Sì perché $S_N(x)$ è la combinazione lineare y di $\{e_n\}_{|n|\leqslant N}$ che minimizza $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x-y|^2$, dunque fa meglio di $y=0$.

6. $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{g(z)\,\mathrm{d}z}{z^{n+1}}$ per $0 < r < 2$

7. 2π

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\heartsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$