



 Matematica III — Scritto del 10/07/04 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Calcolare $\int_Q d\omega$ dove $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$ e $\omega(x, y) = \cos y dx + \sin x dy$.

2. Sia $f(x, y) = (x \cos x - y \sin x) e^{-y}$. Trovare g tale che $f + ig$ sia olomorfa.

3. Calcolare $\int_{\partial\Delta(i,2)} \frac{z dz}{(z-2i)(z-1)(z-2)}$.

4. Sia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0, i\})$ avente poli in 0 e in i .
Dove converge lo sviluppo di f in serie di Laurent centrato in 0?

5. Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ continua e $S_N(f)$ la sua N -esima approssimazione di Fourier.
È sempre vero che $\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_N(f)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$?

6. Se $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ è olomorfa per $0 < |z| < 1$, come si calcolano gli a_n in funzione di f ?

7. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = x\}$. Calcolare $\int_S \langle n | \text{rot}(v) \rangle$ dove n è la normale a S avente terza coordinata positiva, e $v(x, y, z) = (y, -z, x)$.

 Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♠ 8. ◇ 9. ♣ 10. ♥



1. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 2 \cosh(1) - \cosh(\sqrt{x^2 + y^2})\}$ e $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo $v(x, y, z) = (e^{-y}(ye^x + 1), -xe^{x-y}, -z(x+y)e^{x-y})$

(A) (2 punti) Si mostri che S è una superficie e se ne trovi una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Si calcoli l'area di S .

(C) (3 punti) Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq \cosh(1)\}$ e $\nu(x, y, z) = (x, y, 0)$. Si calcoli

$$\int_C \langle v | \nu \rangle.$$

(D) (4 punti) Sia n il campo normale su S con terza coordinata positiva. Si calcoli

$$\int_S \langle v | n \rangle.$$

2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \arctgt + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Sia (a, b) l'intervallo massimale di definizione della soluzione. Si dica se $a > -\infty$ e se $b < +\infty$.

(B) (3 punti) Si calcolino, se esistono

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t), \quad \lim_{t \rightarrow b} x(t).$$

(C) (3 punti) Si mostri che x non ha punti di massimo locale.

(D) (3 punti) Si mostri che x ha un punto di minimo locale.



Risposte esatte

5. \diamond 1. 2π 2. $g(x, y) = (x \sin x + y \cos x) e^{-y}$ 3. $2\pi i \left(\frac{z}{(z-1)(z-2)} \Big|_{z=2i} + \frac{z}{(z-2i)(z-2)} \Big|_{z=1} \right) = \pi(1-i)$ 4. Per $0 < |z| < 1$ 5. Sì perché $S_N(f)$ è la combinazione lineare g di $\{e_n\}_{|n| \leq N}$ che minimizza $\int_{-\pi}^{\pi} |f-g|^2$, dunque fa meglio di $g=0$.6. $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}}$ per $0 < r < 1$ 7. -2π