UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 7/1/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Per quali $t \in [0,1]$ converge la $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi t)^{n+1} \left(t + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$?

2. Provare che $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2=1, \ z = x^2-y^2\}$ è una curva connessa.

3. Che tipo di punto stazionario è l'origine per il sistema autonomo $\begin{cases} x' = x\,\mathrm{e}^y + 2\sin(y) \\ y' = \sin(x)\cos(y) - 3y \end{cases}$?

4. Si consideri l'equazione alle differenze $a_{n+3} = 3^n a_n + a_{n+1}a_{n+2}$. Quali sono gli interi N, K tali che se due soluzioni coincidono ai tempi $N, N+1, \ldots, N+K$ allora coincidono sempre?

5. Se $f(t) = |t - \pi/2|$ e $\alpha_n(f)$ sono i coefficienti di Fourier di f, quanto fa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \alpha_n(f)$?

6. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = -x \cdot \chi_{[0,1]}(x)$.

7. Risolvere $x''' = 3x'' - 4x$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 7/1/04 — Esercizî

1. Siano a, b, R numeri reali positivi tali che $R > a$ e

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

(A) (3 punti) Mostrare che F è una superficie e trovarne una parametrizzazione.

(B) (3 punti) Calcolare il volume V del dominio racchiuso da F.

(C) (3 punti) Sia A l'area di F. Mostrare che

$$A \leqslant 4\pi^2 R \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(D) (3 punti) Sia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Trovare il massimo della funzione f su F ed i punti in cui è assunto.

2. Per $k > 0$ considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x(\mathrm{e}^t - \sin^2(x)) \\ x(0) = k. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Mostrare che per ogni k la soluzione massimale x_k è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(B) (3 punti) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{t \to +\infty} x_k(t)$.

(C) (3 punti) Mostrare che la funzione x_k ha al più un punto di minimo e non ha punti di massimo.

(D) (3 punti) Provare che $\lim\limits_{t \to -\infty} x_k(t)$ ed è multiplo intero di π.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 7/1/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $t \in [0, 1)$

2. È il bordo di una sella

3. Di sella

4. N qualsiasi, $K \geqslant 2$

5. π

6. $-\frac{i}{t}\,\mathrm{e}^{-it} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-it} + \frac{1}{t^2}$

7. $x(t) = (1 - t)\,\mathrm{e}^{2t}$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$