



Esercizio 1. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |z| \leq 1\}$.

(A) [5 punti] Si calcolino il volume di A e l'area di ∂A .

(B) [5 punti] Posto $v(x, y, z) = (x^2 - zx + z, zy^2 - xy, xy + z)$, si calcoli

$$\int_{\partial A} \langle v | n \rangle$$

dove n è la normale esterna a ∂A .

(C) [5 punti] Sia ω la 2-forma definita da

$$\omega(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dz - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dz.$$

Si calcoli $\left| \int_{\partial A} \omega \right|$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente equazione alle differenze:

$$\sqrt{2}x_{n+3} = -x_{n+2} - \frac{1}{\sqrt{2}}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n.$$

(A) [3 punti] Si scriva la soluzione generica dell'equazione.

(B) [3 punti] Si dica se esiste una soluzione non limitata.

(C) [3 punti] Si caratterizzino tutte le soluzioni periodiche.

(D) [3 punti] Si scriva la soluzione z_n con condizioni iniziali

$$z_0 = 1 \quad z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad z_2 = -\frac{1}{2}.$$

(E) [3 punti] Detta l_n la lunghezza del segmento che congiunge z_{n-1} e z_n , si discuta la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n.$$

Esercizio 3. Per ogni intero positivo k , sia $f_k(z) = \frac{kz^{k-1}}{z^k - 1}$.

(A) [3 punti] Si trovino gli zeri e i poli di f_k , specificandone l'ordine.

(B) [4 punti] Si calcoli $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} z^k f_k(z) dz$.

(C) [4 punti] Si calcoli $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} z^k \frac{f'_k(z)}{f_k(z)} dz$.

(D) [4 punti] Si dica se esiste una funzione olomorfa h non costante tale che

$$\int_{\partial\Delta_2} h(z) f_k(z) dz = 0$$

per ogni $k \geq 2$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
