UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 12/7/03

Esercizio 1. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ |z| \le 1\}$.

(A) [5 punti] Si calcolino il volume di A e l'area di ∂A.

(B) [5 punti] Posto $v(x, y, z) = (x^2 - zx + z, zy^2 - xy, xy + z)$, si calcoli

$$\int_{\partial A} \langle v | n \rangle$$

dove n è la normale esterna a ∂A.

(C) [5 punti] Sia ω la 2-forma definita da

$$\omega(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z.$$

Si calcoli $\left| \int_{\partial A} \omega \right|$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente equazione alle differenze:

$$\sqrt{2} x_{n+3} = -x_{n+2} - \frac{1}{\sqrt{2}} x_{n+1} - \frac{1}{2} x_n.$$

(A) [3 punti] Si scriva la soluzione generica dell'equazione.

(B) [3 punti] Si dica se esiste una soluzione non limitata.

(C) [3 punti] Si caratterizzino tutte le soluzioni periodiche.

(D) [3 punti] Si scriva la soluzione z_n con condizioni iniziali

$$z_0 = 1 \qquad z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -\frac{1}{2}.$$

(E) [3 punti] Detta l_n la lunghezza del segmento che congiunge z_{n-1} e z_n, si discuta la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n.$$

Esercizio 3. Per ogni intero positivo k, sia $f_k(z) = \dfrac{kz^{k-1}}{z^k - 1}$.

(A) [3 punti] Si trovino gli zeri e i poli di f_k, specificandone l'ordine.

(B) [4 punti] Si calcoli $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial\Delta_2} z^k f_k(z)\,\mathrm{d}z$.

(C) [4 punti] Si calcoli $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial\Delta_2} z^k \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}\,\mathrm{d}z$.

(D) [4 punti] Si dica se esiste una funzione olomorfa h non costante tale che

$$\int_{\partial\Delta_2} h(z) f_k(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

per ogni $k \geq 2$.