Matematica III — Scritto del 25/06/02

Esercizio 1.

(A) [4 punti] Sia $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva semplice e chiusa. Sia D il dominio limitato racchiuso da α, e si indichi con $L(\alpha)$ la lunghezza di α. Si dimostri che per ogni coppia di punti $x, y \in D$ vale la disuguaglianza

$$|x-y| \leq L(\alpha)/2.$$

(B) [3 punti] Si consideri la funzione meromorfa f definita da $f(z) = 1/\sin z$. Si dimostri che i poli di f sono esattamente i punti della forma $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, e che il residuo di f in $k\pi$ è $(-1)^k$.

(C) [4 punti] Sia $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva semplice e chiusa. Si dimostri che

$$\left| \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant 2\pi + L(\alpha)/2.$$

(D) [4 punti] Si dica se la disuguaglianza del punto (C) valga per qualsiasi curva α chiusa (non necessariamenti semplice).

Esercizio 2. Sia x_k la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = x^2 - (\arctan t)^2 \\ x(0) = k \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dimostri che se $k \geqslant \pi/2$ la soluzione esiste nell'intervallo $(-\infty, a_k)$ per un qualche $0 < a_k < +\infty$.

(B) [5 punti] Si dimostri che se $k > \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ allora $a_k < \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

(C) [3 punti] Si dimostri che x_k ha al più un minimo ed un massimo relativi, per ogni k.

(D) [4 punti] Si dimostri che esiste $k_0 > 0$ tale che per ogni $|k| < k_0$ la soluzione x_k esiste su tutto $\mathbb{R}$ ed esistono i limiti $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ e $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$.

Esercizio 3. Al variare di $s, t \in \mathbb{R}$ con $s \leqslant 0 \leqslant t$ si consideri il seguente dominio in $\mathbb{R}^3$:

$$K(s,t) = \{(x,y,z): \; x^2+y^2 \leqslant z^2, \; s \leqslant z \leqslant t\}.$$

(A) [5 punti] Si considerino i $K(s,t)$ aventi volume uno, e si dica quali tra questi hanno bordo di area massima e minima.

(B) [5 punti] Sia $S(t) \subset K(0,t)$ il bordo laterale del cono, dato da

$$S(t) = \{(x,y,z): \; x^2+y^2 = z^2, \; 0 \leqslant z \leqslant t\}.$$

Si consideri il campo di vettori v su $\mathbb{R}^3$ dato da $v(x,y,z) = (-x+y^2, z^2-y, e^{x^2+y^2}+2z)$. Si scelga un'orientazione per S e si calcoli

$$\left| \int_{S(t)} v \cdot n \right|$$

ove n è il vettore normale esterno a $S(t)$.

(C) [5 punti] Sia $U = \{(x,y,z): \; -1 \leqslant z \leqslant 1\}$. Si dica se esista una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ derivabile con gradiente sempre non nullo tale che $K(-1,1) = \{(x,y,z) \in U: \; f(x,y,z) = 0\}$.