Matematica III — Scritto del 1/6/02

Esercizio 1.

(A) [3 punti] Si trovino le radici complesse del polinomio $z^4 + 1$.

(B) [4 punti] Si calcoli $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

(C) [4 punti] Sia $\alpha_k(t) = k + \cos(t) + i\sin(t)$ per $t \in [0, 2\pi]$. Si discuta, dove è definito, il valore della grandezza $\int_{\alpha_k} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

(D) [4 punti] Sia $\beta_k(t) = k + \sin(2t) + i\sin(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$. Si discuta, dove è definito, il valore della grandezza $\int_{\beta_k} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia x_k la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\mathrm{e}^x - t^2}{\mathrm{e}^x + t^2}, \\ x(0) = k. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dimostri che x_k ha al più un massimo e un minimo locali.

(B) [3 punti] Si dimostri che x_k esiste per ogni $t \le 0$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(C) [3 punti] Si dimostri che x_k esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(D) [3 punti] Si dimostri che se $x_k(t) = 0$ allora $|t| \geqslant |k|$.

(E) [3 punti] Si dimostri che per ogni k fissato l'equazione $x_k(t) = 0$ ha al più tre soluzioni in t. Si dimostri che se ne ha esattamente tre allora $|k| \leqslant 1$.

Esercizio 3. Sia u una funzione derivabile definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e si consideri in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la 1-forma

$$\omega(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + u(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

(A) [5 punti] Si discuta per quali u la forma ω sia chiusa.

(B) [5 punti] Si dimostri che ω è chiusa se e solo se è esatta.

(C) [5 punti] Nel caso in cui ω sia esatta, si descrivano le sue primitive.