Uniforme continuità

E. Paolini

17 marzo 2003

1 Funzioni uniformemente continue, Lipschitziane, α-Hölderiane

Definizione 1 *Una funzione* $f\colon A \to \mathbf{R}$

- *si dice* continua *se*

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- *si dice* uniformemente continua *se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x, y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- *si dice* Lipschitziana *se esiste una costante* $L > 0$ *tale che*

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \le L|x-y|$$

- *si dice* α-Hölderiana *(con* $\alpha > 0$*) se esiste una costante* $C > 0$ *tale che*

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha$$

Chiaramente ogni funzione uniformemente continua è anche continua. Si noti che 1-Hölderiano e Lipschitziano sono sinonimi. Notiamo anche che se f è α-Hölderiana con $\alpha > 1$ si ha

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \le C|x-x_0|^{\alpha-1} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

e quindi $f'(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in A$. Dunque se A è un intervallo allora f è costante. Per questo le funzioni α-Hölderiane sono interessanti solo quando $\alpha < 1$.

Teorema 2 *Se* $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *è* α*-Hölderiana per un certo* $\alpha > 0$ *allora* f *è* β*-Hölderiana per ogni* $\beta \le \alpha$*. In particolare se* f *è Lipschitziana allora* f *è* α*-Hölderiana per ogni* $\alpha < 1$.

Dimostrazione:
Supponiamo dunque che valga

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in [a,b].$$

Dato $\beta \le \alpha$ poniamo $C' = C|b-a|^{\alpha-\beta}$. Allora se $x, y \in [a,b]$ si ha

$$C|x-y|^\alpha \le C'|x-y|^\beta$$

e dunque f è β-Hölderiana. □

Teorema 3 *Per verificare che una funzione $f\colon A \to \mathbf{R}$ è uniformemente continua è sufficiente mostrare che esiste una funzione $G\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ che*

- $\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \le G(|x - y|)$;
- $\lim_{t \to 0^+} G(t) = 0$.

Dimostrazione:
Essendo $G(t) \to 0$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \quad t < \delta \Rightarrow G(t) < \varepsilon$$

dunque

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le G(|x - y|) < \varepsilon$$

cioè f è uniformemente continua. □

Se ne deduce facilmente che ogni funzione Lipschitziana o α-Hölderiana è uniformemente continua.

Teorema 4 *Per verificare che una funzione $f\colon A \to \mathbf{R}$ non è uniformemente continua è sufficiente trovare due successioni $x_k, y_k \in A$ tali che*

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - y_k| = 0$$

ma

$$\lim_{k \to \infty} |f(x_k) - f(y_k)| > 0.$$

Dimostrazione:
Siccome $|f(x_k) - f(y_k)|$ è una successione positiva ma non infinitesima possiamo trovare un $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione indicizzata tramite k_j tale che $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \ge \varepsilon$ per ogni j. D'altra parte essendo $|x_k - y_k| \to 0$ si ha

$$\forall \delta > 0\ \exists k \quad |x_k - y_k| < \delta$$

e quindi per ogni $\delta > 0$ è possibile trovare k_j tale che posto $x = x_{k_j}$ e $y = y_{k_j}$ si abbia $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$ mentre $|x - y| < \delta$. Dunque f verifica la negazione della proprietà di uniforme continuità

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in A \quad |x - y| < \delta \text{ ma } |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon.$$

□

2 Esercizi

1. Mostrare che $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua.
2. Mostrare che $f(x) = 1/x$ non è uniformemente continua.
3. Mostrare che $f(x) = \sin(1/x)$ non è uniformemente continua.
4. Mostrare che $f(x) = |x|$ è Lipschitziana.
5. Mostrare che $f(x) = \sqrt{|x|}$ è 1/2-Hölderiana ma non Lipschitziana.
6. Trovare una funzione uniformemente continua ma non α-Hölderiana per alcun $\alpha > 0$.

3 Successioni di Cauchy

Definizione 5 *Una successione x_k si dice* di Cauchy *se vale la seguente proprietà*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, j \geq N \quad |x_k - x_j| < \varepsilon$$

Teorema 6 *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione:
Sia $x_k \to x$ una successione convergente. Dunque vale

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k \geq N \quad |x_k - x| < \varepsilon$$

e quindi presi $k, j \geq N$ si ha

$$|x_k - x_j| \leq |x_k - x| + |x - x_j| < 2\varepsilon$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, j \geq N \quad |x_k - x_j| < 2\varepsilon$$

che è equivalente alla definizione delle successioni di Cauchy. □

Teorema 7 *Ogni successione di Cauchy converge.*

Dimostrazione:
Data una successione di Cauchy x_k definiamo

$$A = \{x \in \mathbf{R} \colon \exists N\ \forall k \geq N \quad x_k \leq x\}.$$

Chiaramente se $x \in A$ e $y \geq x$ anche $y \in A$. Dunque A è un intervallo illimitato superiormente. Se A fosse anche illimitato inferiormente (cioè $A = \mathbf{R}$) si avrebbe

$$\forall M\ \exists N\ \forall k \geq N \quad x_k \leq -M$$

che significa $x_k \to -\infty$. Questo significa in particolare che dato qualunque $\varepsilon > 0$, qualunque N e qualunque $j \geq N$ esiste $k \geq N$ tale che $x_k < x_j - \varepsilon$ cioè $|x_k - x_j| > \varepsilon$. Ma questo va contro l'ipotesi che x_k sia di Cauchy.

Dunque A è inferiormente limitato e quindi ammette estremo inferiore. Posto $a = \inf A$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \quad a + \varepsilon > x$$

e quindi $a + \varepsilon \in A$ per ogni $\varepsilon > 0$. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $a - \varepsilon \notin A$. Da $a + \varepsilon \in A$ ricaviamo che

$$\exists N_1\ \forall k \geq N_1 \quad x_k \leq a + \varepsilon$$

e da $a - \varepsilon \notin A$ troviamo

$$\forall N\ \exists j \geq N \quad x_j \geq a - \varepsilon$$

dalla proprietà di Cauchy si ha invece

$$\exists N_2\ \forall k, j \geq N_2 \quad x_j < x_k + \varepsilon.$$

Mettendo assieme queste proprietà e scegliendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \exists j \geq N\ \forall k \geq N \quad a - \varepsilon < x_j < x_k + \varepsilon \leq a + 2\varepsilon$$

da cui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k \geq N a - 2\varepsilon < x_k \leq a + \varepsilon$$

che significa

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a.$$

□

Teorema 8 *Se $f: A \to \mathbf{R}$ è uniformemente continua e x_k è una successione di Cauchy in A allora la successione $y_k = f(x_k)$ è di Cauchy.*

Dimostrazione:
Sia x_k una successione di Cauchy e sia f uniformemente continua. Dall'uniforme continuità di f

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

troviamo

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon \quad |x_k - x_j| < \delta \Rightarrow |y_k - y_j| < \varepsilon.$$

Essendo x_k di Cauchy si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall k, j \geq N \quad |x_k - x_j| < \delta_\varepsilon$$

da cui

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall k, j \geq N \quad |y_k - y_j| < \varepsilon$$

cioè y_k è di Cauchy. □

4 Estensioni

Teorema 9 *Sia $f:]a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to a^+} f(x).$$

Dimostrazione:
Sia $x_k > a$ una qualunque successione convergente ad a. Allora x_k è una successione di Cauchy e quindi $f(x_k)$ è a sua volta una successione di Cauchy che quindi converge ad un certo valore l. D'altra parte il valore l trovato non dipende dalla successione scelta. Infatti prese x_k e y_k due diverse successioni convergenti ad a, sappiamo che $f(x_k) \to l_1$ e $f(y_k) \to l_2$. Ma allora anche la successione

$$z_k = \begin{cases} x_k & \text{per } k \text{ pari} \\ y_k & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

converge ad a e quindi anche $f(z_k)$ converge. Ma i termini pari di $f(z_k)$ convergono a l_1 e i termini dispari convergono a l_2. Dunque per l'unicità del limite $l_1 = l_2$. In conclusione esiste $l \in \mathbf{R}$ tale che per qualunque successione $x_k \to a^+$ si ha $f(x_k) \to l$ e quindi

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

□

Notiamo dunque che una funzione uniformemente continua $f:]a, b] \to \mathbf{R}$ può essere con continuità ad una funzione continua $\bar{f}: [a, b] \to \mathbf{R}$. D'altra parte la funzione $\bar{f}$ risulta essere anche uniformemente continua per il teorema di Cantor (o per verifica diretta).

5 Modulo di continuità

Definizione 10 *Data una funzione $f: A \to \mathbf{R}$, chiamiamo* modulo di continuità *di f la funzione $M: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ definita da*

$$M(t) = \sup\{|f(x) - f(y)|: x, y \in A, \ |x - y| \leq t\}$$

Dalla definizione si verifica facilmente che $M(t)$ è una funzione crescente. Infatti se l'insieme di cui si calcola l'estremo superiore diventa più grande (rispetto all'inclusione di insiemi) al crescere di t e quindi anche l'estremo superiore cresce al crescere di t.

Teorema 11 *Se $f: A \to \mathbf{R}$ è una funzione qualunque e M è il suo modulo di continuità allora:*

- *f è uniformemente continua se e solo se $M(t) \to 0$ per $t \to 0^+$;*
- *f è lipschitziana se esiste $L > 0$ tale che $M(t) \leq Lt$;*
- *f è α-Hölderiana se esiste $C > 0$ tale che $M(t) \leq Ct^\alpha$.*

Dimostrazione:
Innanzitutto si verifica direttamente dalla definizione di M che si ha la seguente equivalenza

$$\begin{gathered} M(\delta) \leq \varepsilon \\ \Updownarrow \\ \forall x, y \in A \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \end{gathered}$$

e dalla definizione di limite (ricordando che $M(t)$ è positiva e crescente) si ha anche

$$\lim_{t \to 0^+} M(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; M(\delta) \leq \varepsilon.$$

Mettendo assieme le due precedenti equivalenze si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; \forall x, y \in A \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

che è equivalente alla definizione di uniforme continuità per f.

Chiaramente se M è il modulo di continuità di f allora si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq M(|x - y|) \quad \forall x, y \in A.$$

Dunque se $M(t) \leq Lt$ si trova che f è lipschitziana e se $M(t) \leq Lt^\alpha$ si trova che f è α-Hölderiana.

D'altro canto se f è Lipschitziana si ha

$$M(t) = \sup_{|x-y| \leq t} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{|x-y| \leq t} L|x - y| \leq Lt.$$

Risultato analogo si ottiene per le funzione α-Hölderiane.

□