La successione $\sin n$

Emanuele Paolini

11 novembre 2004

In questa nota mostreremo che l'insieme dei punti della successione $a_n = \sin n$ è denso nell'intervallo $[-1, 1]$.

Proposizione 1. *Siano α, β numeri reali non nulli tali che α/β sia irrazionale. Allora per ogni $N \in \mathbb{N}$ esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ con $|p| \leq N$ tali che*

$$0 \neq |p\alpha + q\beta| \leq 1/N.$$

Dimostrazione. Dato $p \in \mathbb{Z}$ consideriamo il numero intero

$$q := -\left\lfloor \frac{p\alpha}{\beta} \right\rfloor. \tag{1}$$

Chiaramente si ha $q \in [-p\alpha/\beta, 1 - p\alpha/\beta)$ da cui si nota che con questa scelta di q vale

$$p\alpha + q\beta \in [0, 1).$$

Consideriamo ora gli $N + 1$ numeri $p = 0, 1, \ldots, N$. Scegliamo i corrispondenti valori di q dati da (1). Otteniamo dunque $N + 1$ numeri $p\alpha + q\beta$ tutti compresi nell'intervallo $[0, 1)$. Dunque di questi $N+1$ numeri, ce ne devono essere sicuramente due che distano tra loro meno di $1/N$. Dunque esistono due interi distinti p_1 e p_2 e i corrispondenti q_1 e q_2 tali che

$$|p_1\alpha + q_1\beta - (p_2\alpha + q_2\beta)| \leq 1/N$$

da cui posto $p = p_1 - p_2$, $q = q_1 - q_2$ si trova che $|p| \leq N$ e

$$|p\alpha + q\beta| \leq 1/N.$$

Ci resta da dimostrare che $p\alpha + q\beta \neq 0$. Siccome p_1 e p_2 erano distinti per costruzione, sappiamo che $p \neq 0$. Se per assurdo fosse $p\alpha + q\beta = 0$ avremmo $\alpha/\beta = -q/p$ che contraddice l'ipotesi secondo cui α/β non è razionale. □

Corollario 2. *Siano α, β numeri reali non nulli tali che α/β sia irrazionale. Allora, dato qualunque $x \in \mathbb{R}$ e qualunque $\varepsilon > 0$ esistono $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$ tali che*

$$0 \neq |p\alpha + q\beta - x| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Sia $N > 2/\varepsilon$ e siano $p_0, q_0 \in \mathbb{Z}$, dati dalla proposizione precedente, tali che

$$0 \neq |p_0\alpha + q_0\beta| \leq 1/N < \varepsilon/2.$$

Supponiamo anche $p_0 \geq 0$ (in caso contrario basta cambiare segno ad entrambi p_0 e q_0). Posto $\delta := |p_0\alpha + q_0\beta|$ abbiamo dunque $\delta \in (0, \varepsilon/2)$ e scelto $k = \lceil x/\delta - 1 \rceil$ troviamo che $k\delta \in (x - 2\delta, x - \delta)$. Dunque con la scelta $p = kp_0$ e $q = kq_0$ troviamo $p, q \in Z$, $p \geq 0$ e

$$p\alpha + q\beta = k\delta \in (x - 2\delta, x - \delta) \subset (x - \varepsilon, x)$$

da cui segue immediatamente la tesi. □

Con questo lemma a disposizione siamo pronti a dimostrare che l'insieme dei punti limite della successione $a_n = \sin n$ è l'intervallo $[-1, 1]$. Dato $\alpha \in [-1, 1]$ consideriamo infatti un numero x tale che $\sin x = \alpha$. Preso un qualunque $k \in N$, applicando il corollario precedente con $\alpha = 1$ e $\beta = 2\pi$ possiamo trovare due numeri interi $p_k, q_k \in \mathbb{Z}$ con $p_k > 0$ tali che

$$0 \neq |p_k - (x - 2\pi q_k)| < 1/k.$$

Dunque, sapendo che $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, si ha

$$|\sin p_k - \alpha| = |\sin p_k - \sin(x - 2q_k\pi)| \leq |p_k - (x - 2\pi q_k)| \leq 1/k.$$

Dunque p_k è una successione di numeri interi tali che $\sin p_k \to \alpha$. Siccome $|p_k - (x - 2\pi q_k)| \neq 0$ possiamo facilmente concludere che p_k assume infiniti valori distinti e quindi $p_k \to +\infty$. Dunque esiste una sottosuccessione strettamente crescente p_{k_n}. La successione corrispondente $a_{p_{k_n}} = \sin(p_{k_n})$ converge dunque ad α.