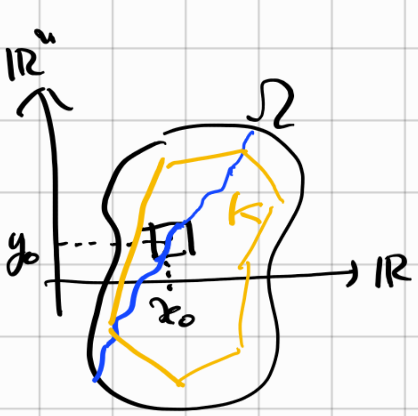
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 62 — 6.3.2024



Teorema esistenza e unicità locale.

$$(*)\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$f \in C^1$.

[Teorema esistenza locale.
basta f continua. (non lo dimostriamo)]

Teorema (esistenza e unicità globale)

$\Omega = (a,b) \times \mathbb{R}^n \qquad -\infty \le a < b \le +\infty$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Ipotesi: f soddisfa le ipotesi del teorema di $\exists!$ locale.

Inoltre: $\quad |\underline{f}(x,\underline{y})| \le m|\underline{y}| + q$

con $m, q \in \mathbb{R}$.

(crescita sublineare)

dim

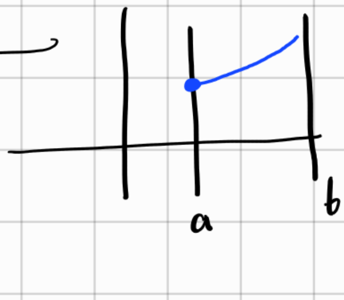
è il lemma di Gronwall.

Lemma

Sia $\underline{u} : [a,b) \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1,

tale che

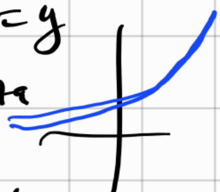
$$\underbrace{|\underline{u}'(t)| \le m \cdot |\underline{u}(t)| + q}$$



Allora:

ES $y' = y^2$
non ha esistenza globale

ES $y' = y$
ha esistenza globale



ES $y' = y^p$
ha esistenza globale se $p \le 1$.

$$\left[\ln\left(1+|\underline{u}(t)|^2\right)\right]_a^x = \int_a^x \left(\ln\left(1+|\underline{u}(t)|^2\right)\right)' dt$$

$$= \int_a^x \frac{2\,\underline{u}(t)\cdot\underline{u}'(t)}{1+|\underline{u}(t)|^2}\,dt$$

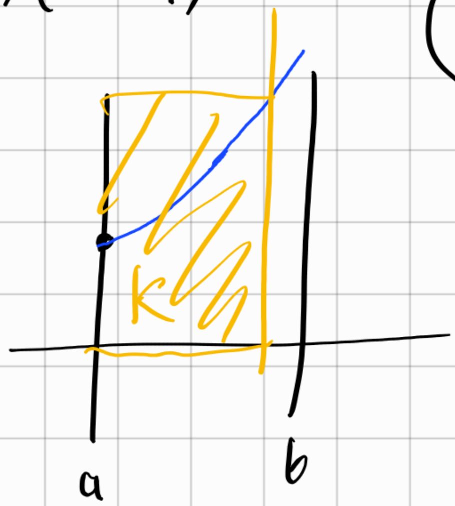
$$\leq \int_a^x \frac{2\,|u(t)|\cdot\left(m|u(t)|+q\right)}{1+|u(t)|^2}\,dt$$

$$\leq 2\int_a^x \frac{m\,|u|^2 + |u|\cdot q}{1+|u|^2}\,dt \leq 2\int_a^x \left(m + q\left(\frac{|u|}{1+|u|^2}\right)\right)$$

$$\leq 2\int_a^x \left(m+\frac{q}{2}\right)dt \qquad \frac{s}{1+s^2}\leq\frac{1}{2}$$

$$= (x-a)(2m+q) \qquad 0\leq (s-1)^2 = s^2-2s+1$$

$$s^2+1\geq 2s$$



Se $b<+\infty$ $\quad |u(x)|$ è limitata su $[a,b)$ (sta sotto un esponenziale). $\square$

<u>Corollario</u> Se l'equazione è lineare:

$$\underline{u}'(x) = \underline{\underline{A}}(x)\cdot\underline{u}(x) + \underline{B}(x)$$

ho esistenza globale.

$m = \sup\|\underline{\underline{A}}\| \quad q = \sup|\underline{B}|$ $\qquad$ a ——— b

$\|\underline{A}\|$ è definito in modo che $|\underline{A}\cdot\underline{v}| \le \|A\|\cdot|v|$

$$\|A\|_\infty = \sup \frac{|Av|}{|v|} = \sup_{|v|=1} |Av| = \max_{|v|=1} |A\cdot v|$$

Equazioni di ordine superiore

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right) \\ u(x_0) = y_0 \\ u'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ordine n.

n condizioni

$u: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$u \rightsquigarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$u: I \to \mathbb{R}$

$\underline{v}: I \to \mathbb{R}^n$

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix}$$

Il problema di Cauchy diventa:

$$\begin{cases} \underline{v}'(x) = \begin{pmatrix} v_2(x) \\ v_3(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \\ f(x, \underbrace{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)}_{\underline{v}(x)}) \end{pmatrix} \\ \underline{v}(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

ES

(Pendolo smorzato)

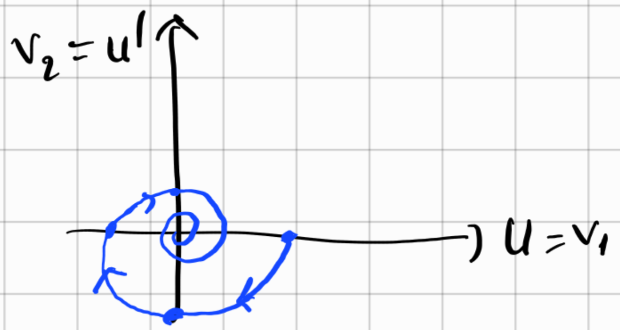
$$u''(x) + \sin u(x) + u'(x) = 0$$

$$u''(x) = -\sin(u(x)) - u'(x)$$

$$\underline{V}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\underline{V}'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ u''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(x) \\ -\sin(v_1(x)) - v_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1'(x) = v_2(x) \\ v_2'(x) = -\sin(v_1(x)) - v_2(x). \end{cases}$$



Teorema di $\exists!$ per le eq. di ordine superiore.

$\begin{cases} \text{locale} \\ \text{globale} \end{cases}$

Tutto questo per dire che anche le equazioni lineari di ordine n con coefficienti C^0, soddisfano $\exists!$ globale.

EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE n.

ES
$$\underset{\substack{\uparrow\\1}}{u''} - \underset{\substack{\uparrow\\-3}}{3u'} + \underset{\substack{\uparrow\\2}}{2u} = 0$$
è una eq. diff. lineare II ordine, omogenea a coefficienti costanti

tentativo: $\boxed{u = e^{\lambda x}}$

$u' = \lambda e^{\lambda x}$

$u'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

butto $u = e^{\lambda x}$ nell'equazione: $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\,\cancel{e^{\lambda x}} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$
chiamiamolo polinomio associato alla eq. diff.
$$= (\lambda-1)(\lambda-2)$$
$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$u_1 = e^{x}$ è soluzione

$u_2 = e^{2x}$ è soluzione.

Oss $\quad L[u] = u'' - 3u' + 2u$

$$L[u+v] = L[u] + L[v]$$
$$L[t \cdot u] = t \cdot L[u]$$
L è lineare

se u_1 e u_2 sono soluzioni $\quad L[u_1] = 0$, $L[u_2] = 0$

anche $Au_1 + Bu_2$ è soluzione $\quad u_1, u_2 \in \operatorname{Ker} L$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

Ho trovato uno spazio vettoriale di dimensione 2 di soluzioni: $u(x) = Ae^{x} + Be^{2x}$

$\cong \mathbb{R}^2$ $\qquad A \in \mathbb{R} \quad B \in \mathbb{R}$

Dubbio: siamo sicuri che u_1 e u_2 siano indipendenti

$$u_1 \overset{?}{=} t \cdot u_2 \qquad u_1(x) = t \cdot u_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = t e^{2x} = t (e^x)^2$$

$$t = e^x \text{ non è costante}$$

u_1 è indipendente da u_2.

Come risolvo $u'' - 2u' + u = 0$?

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$
