

# Analisi Matematica A e B

## Prova scritta parziale n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24  
Università di Pisa

24 febbraio 2023

1. (a) Determinare il numero di soluzioni (reali positive) dell'equazione

$$(1 + \ln x)^2 = x.$$

- (b) Siano  $a$  e  $b$  rispettivamente la più piccola e la più grande delle soluzioni dell'equazione precedente. Determinare chi è più grande tra  $\frac{1}{a}$  e  $b$ .

*Soluzione.* L'equazione ha senso solo per  $x > 0$ . Osserviamo immediatamente che  $x = 1$  è soluzione. Definiamo

$$f(x) = x - (1 + \ln x)^2.$$

Le soluzioni dell'equazione data corrispondono agli zeri della funzione  $f$ . Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha  $f(x) \rightarrow -\infty$ , per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $f(x) \rightarrow +\infty$ . Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 1 - 2(1 + \ln x) \frac{1}{x} = \frac{x - 2 - 2 \ln x}{x}.$$

Per determinare il segno della derivata consideriamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = x - 2 - 2 \ln x$$

che ha lo stesso segno della derivata (visto che  $x > 0$ ). La derivata di  $g$  è

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x}$$

che si annulla in  $x = 2$ . Si ha  $g(2) = 2 - 2 - 2 \ln 2 = -2 \ln 2 < 0$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  e  $g(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Osserviamo anche che  $g(1) = -1$ . Per il teorema degli zeri la funzione  $g$  si annulla in due punti  $x_1$  e  $x_2$  con  $0 < x_1 < 1 < 2 < x_2$ . Nell'intervallo  $(0, 2]$  la funzione  $g$  è strettamente decrescente, nell'intervallo  $[2, +\infty)$  è strettamente crescente e dunque  $g$  è iniettiva separatamente sui due intervalli e dunque si annulla solamente nei due punti  $x_1$  e  $x_2$ . Dunque il segno di  $f'$ , che coincide con il segno di  $g$ , è positivo per  $0 < x < x_1$  e per  $x_2 < x < +\infty$  e negativo per  $x_1 < x < x_2$ . Significa che  $f$  è strettamente crescente su  $(0, x_1]$ , strettamente decrescente su  $[x_1, x_2]$  e strettamente crescente su  $[x_2, +\infty)$ .

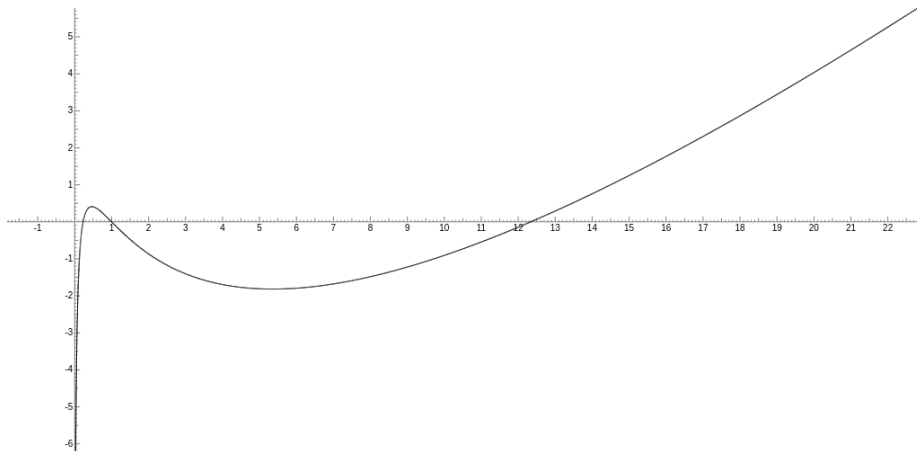


Figura 1: Il grafico della funzione  $f(x)$ .

Visto che  $f(1) = 0$  e  $x_1 < 1 < x_2$  si ha  $f(x_1) > 0$  e  $f(x_2) < 0$ . Dunque l'equazione  $f(x) = 0$  ha, oltre alla soluzione  $x = 1$  altre due soluzioni reali positive,  $a$  e  $b$  con  $a < 1 < 2 < b$ . Ci sono quindi in totale tre soluzioni.

Per rispondere al secondo punto osserviamo che  $f(e^2) = e^2 - (1 + 2)^2 = e^2 - 9 < 0$  e  $f(e^{-2}) = e^{-2} - (1 - 2)^2 = e^{-2} - 1 < 0$ . Dunque  $a > e^{-2}$  e  $b > e^2$  da cui  $1/a < e^2 < b$ .  $\square$

2. *Esercizio 2.* Determinare i valori del parametro  $\alpha > 0$  per i quali la seguente serie numerica converge:

$$\sum_k \frac{1}{k^\alpha} - \sin \left[ \left( \sin \frac{1}{k} \right)^\alpha \right].$$

*Soluzione.* Si tratta di studiare la convergenza della serie

$$\sum_k f(1/k)$$

con  $f(x) = x^\alpha - \sin \sin^\alpha x$ . Sarà quindi utile fare lo sviluppo di Taylor di  $f$  per  $x \rightarrow 0^+$  per poter determinare l'andamento asintotico di  $f(1/k)$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

Ricordando che per  $t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\ (1 - t)^\alpha &= 1 - \alpha t + o(t) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \sin^\alpha x &= \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^\alpha = x^\alpha \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^\alpha \\ &= x^\alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{6} x^2 + o(x^2) \right) = x^\alpha - \frac{\alpha}{6} x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}). \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned}\sin \sin^\alpha x &= \sin^\alpha x - \frac{1}{6}(\sin^\alpha x)^3 + o(\sin^{3\alpha} x) \\ &= x^\alpha - \frac{\alpha}{6}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) - \frac{1}{6}(x^\alpha + o(x^\alpha))^3 + o(x^{3\alpha}) \\ &= x^\alpha - \frac{\alpha}{6}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) - \frac{1}{6}x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha}).\end{aligned}$$

Dobbiamo quindi distinguere tre casi. Se  $\alpha > 1$  allora  $\alpha + 2 < 3\alpha$  e quindi  $x^{\alpha+2} \gg x^{3\alpha}$  se  $\alpha < 1$  allora  $x^{\alpha+2} \ll x^{3\alpha}$  mentre se  $\alpha = 1$  allora  $x^{\alpha+2} = x^{3\alpha}$ . Dunque

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{6}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) & \text{se } \alpha > 1 \\ \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{1}{6}\right)x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}) & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{6}x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha}) & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

In tutti i casi risulta che la serie  $\sum_k f(1/k)$  ha termini definitivamente positivi, essendo  $\alpha > 0$ . Se  $\alpha > 1$  si ha  $f(1/k) \sim \frac{\alpha}{6k^{\alpha+2}}$  e la serie converge in quanto in questo caso  $\alpha + 2 > 1$ . Lo stesso vale se  $\alpha = 1$ . Se  $\alpha < 1$  si ha  $f(1/k) \sim \frac{1}{6k^{3\alpha}}$  e la serie converge se e solo se  $3\alpha > 1$ , cioè se  $\alpha > \frac{1}{3}$ .

In definitiva la serie converge se e solo se  $\alpha > \frac{1}{3}$ .  $\square$

3. *Esercizio 3.* Sia  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la successione di funzioni

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n).$$

(a) Determinare l'insieme  $I$  dei punti  $x \in \mathbb{R}$  per i quali esiste, finito, il limite puntuale:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Dimostrare che non c'è convergenza uniforme di  $f_n$  verso  $f$  su  $I$ .

(b) Mostrare che per ogni  $c \in (0, 1)$  c'è convergenza uniforme sugli intervalli  $[-1 + c; 1 - c]$  e  $[1 + c; +\infty)$ .

(c) Dimostrare che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ .

*Soluzione.* Per  $n \rightarrow +\infty$  si ha  $x^n \rightarrow 0$  se  $-1 < x < 1$ ,  $x^n = 1$  se  $x = 1$ ,  $x^n \rightarrow +\infty$  se  $x > 1$  e  $x^n = (-1)^n |x|^n$  non ha limite se  $x \leq -1$ . Dunque il limite puntuale di  $f_n(x)$  esiste ed è finito se  $x > -1$  e risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 0 = 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} & \text{se } x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Il limite non esiste se  $x = -1$  (la successione  $f_n(-1)$  oscilla tra i valori  $\pm \operatorname{arctg} 1$ ) e non esiste se  $x < -1$  (la successione  $f_n(x)$  tende a  $\frac{\pi}{2}$  quando  $n$  è pari e tende a  $-\frac{\pi}{2}$  quando  $n$  è dispari). Dunque l'insieme  $I$  dei punti per cui esiste il limite puntuale è  $I = (-1, +\infty)$ .

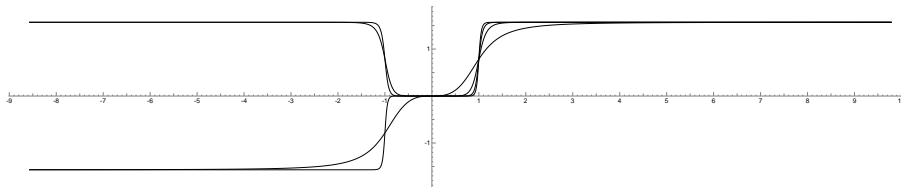


Figura 2: I grafici delle funzioni  $f_n$ .

Abbiamo quindi mostrato che  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per  $x > -1$  fissato e  $n \rightarrow +\infty$ . Ma le funzioni  $f_n$  sono continue mentre  $f(x)$  non è continua. Questo significa che la convergenza non può essere uniforme su nessun intervallo (non banale) che contiene il punto  $x = 1$ .

Ricordiamo che sull'intervallo  $[-1 + c, 1 - c]$  si ha  $f(x) = 0$ . Inoltre è facile verificare che  $|f_n(x)|$  è decrescente sull'intervallo  $(-1, 0]$  e crescente sull'intervallo  $[0, 1)$ . Dunque

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1-c]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [0, 1-c]} |f_n(x)| \\ &= |f_n(1-c)| \rightarrow f(1-c) = 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

e c'è convergenza uniforme su  $[0, 1 - c]$ . Analogamente

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-1+c, 0]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [-1+c, 0]} |f_n(x)| \\ &= |f_n(-1+c)| \rightarrow |f(-1+c)| = 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

e c'è convergenza uniforme anche su  $[-1 + c, 0]$ .

Sull'intervallo  $[1 + c; +\infty)$  si ha  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  ed è facile verificare che  $f_n(x)$  è crescente e minore di  $\frac{\pi}{2}$ . Dunque

$$\begin{aligned} \sup_{x > 1+c} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x > 1+c} \left( \frac{\pi}{2} - f_n(x) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - f_n(1+c) \rightarrow \frac{\pi}{2} - f(1+c) = 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

e c'è convergenza uniforme anche su  $[1 + c; +\infty)$ . Si può quindi concludere che c'è convergenza uniforme sull'unione di questi tre intervalli.

Per l'ultimo punto osserviamo che l'integrale può essere spezzato, per additività:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx + \int_1^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{-1}^1 |f_n(x)| dx + \int_1^{+\infty} \left( \frac{\pi}{2} - f_n(x) \right) dx \end{aligned}$$

in quanto la funzione integranda è positiva e quindi gli integrali esistono.

Sull'intervallo  $(-1, 1)$  si ha  $|f_n| \leq \frac{\pi}{2}$  e, per quanto già visto, si ha convergenza uniforme di  $|f_n|$  a 0 su ogni intervallo  $[\alpha, \beta]$  contenuto in  $(-1, 1)$ .

Grazie al teorema di convergenza dominata possiamo scambiare il limite con l'integrale e concludere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{-1}^1 0 dx = 0.$$

Sull'intervallo  $[1, +\infty)$  se  $n \geq 2$  si ha che  $f_n(x) \geq f_2(x)$  e quindi

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \frac{\pi}{2} - f_n(x) \leq \frac{\pi}{2} - f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x^2 \\ &= \arctg \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Dunque  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  è integrabile su  $[1, +\infty)$  e domina la successione  $f_n$  se escludiamo il primo termine  $n = 1$ . Anche in questo caso possiamo quindi applicare il teorema di convergenza dominata e concludere che il limite cercato è nullo.  $\square$