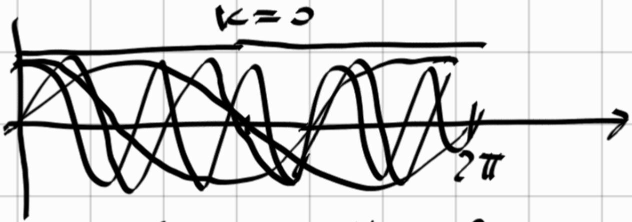
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 26 — 20.11.2023

$$f(x) = \sum a_k e^{ikx} = \sum a_k [\cos kx + i \operatorname{sen} kx] \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{sen} kx$, $\cos kx$



Sono indipendenti $\Leftarrow$ Sono ortogonali rispetto al prodotto scalare:

Fourier

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \cdot w_k \rightsquigarrow \int f \cdot g$$

Altro insieme di funzioni indipendenti: $1, x, x^2, x^3, \dots$

SERIE di POTENZE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Serie di potenze centrata in $z_0 \in \mathbb{C}$ con coefficienti $a_k \in \mathbb{C}$.

Senza perdere di generalità poniamo $z_0 = 0$.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \qquad (*)$$

$$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad A = \{ z \in \mathbb{C} : \text{la serie } * \text{ converge} \}$$

Usiamo il criterio della radice per trovare l'insieme di convergenza assoluta:

$$\sum |a_k| \cdot |z|^k \quad \text{converge?}$$

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|\cdot|z|^k} = \underbrace{\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}_{L} \cdot |z| = \underline{L\cdot|z|}$$

$L\cdot|z| < 1$ se $|z| < \frac{1}{L}$, $L\cdot|z| > 1$ se $|z| > \frac{1}{L}$

Posto $L = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

se $|z| < \frac{1}{L}$ (*) converge assolutam.

se $|z| > \frac{1}{L}$ (*) non converge

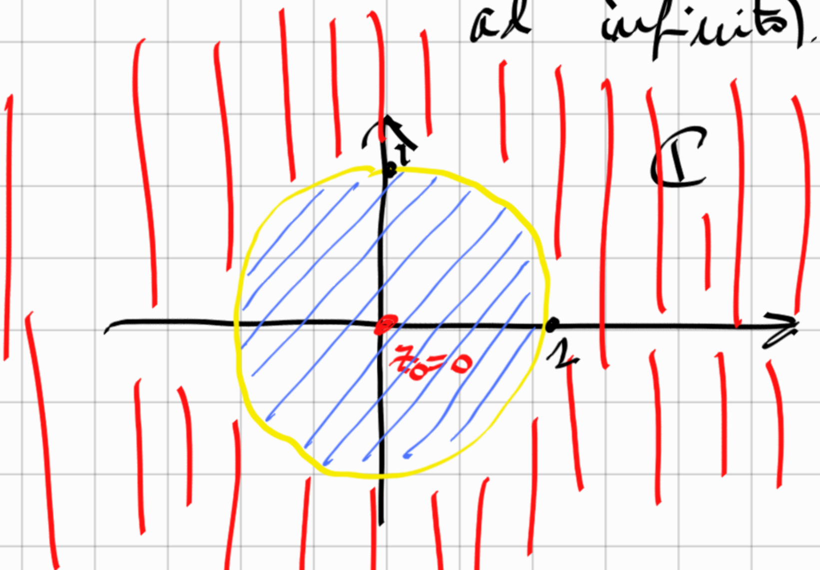
$a_k z^k$ non sono infinitesimi

Def Raggio di convergenza

Posto $R = \frac{1}{L}$ con la convenzione $\frac{1}{0} = \infty$ e $\frac{1}{\infty} = 0$.

Se $|z| < R$ la serie converge assolutamente

Se $|z| > R$ la serie non converge (anzi i termini, in modulo, tendono all'infinito).



Se $R = +\infty$
$A = \mathbb{C}$

Se $R = 0$
$A = \{0\}$

Esempio $\underline{a_k = 1}$ $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ è la solita serie geometrica $q = z$, $R = 1$. Non converge se $|z| = 1$.

$$R = \frac{1}{L} \qquad L = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to+\infty} 1.$$

$A = B_1$ = palla unitaria centrata in 0.
↑ insieme di convergenza

Esempio $a_k = \frac{1}{k^2}$ $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2}$

Posso fare il rapporto: $\frac{|z|^{\cancel{k+1}}}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{\cancel{|z|^k}} \longrightarrow |z|$

$R = 1$.
$$\left[\text{oppure } \limsup \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \limsup \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^2 = 1 \right]$$

Cosa succede se $|z| = 1$? $\left|\frac{z^k}{k^2}\right| = \frac{|z|^k}{k^2} = \frac{1}{k^2}$

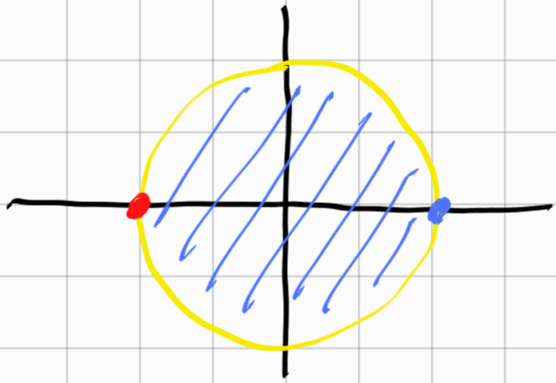
$\sum \frac{1}{k^2}$ è convergente $\Rightarrow$ $\sum \frac{z^k}{k^2}$ è assolutamente convergente su $|z| = 1$

Esempio $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ $\sum \frac{(-1)^k}{k} z^k = \sum \frac{(-z)^k}{k}$

$R = 1$. Cosa succede se $|z| = 1$?

Casi semplici $z = 1$ $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge (ma non assolut.)

$z = -1$ $\sum \frac{1}{k}$ diverge



Cosa succede negli altri z con $|z|=1$?
(usare Dirichlet)

Def Diremo che una funzione $f:\Omega\to\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$)
$\Omega\subseteq\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$)
(Ω aperto)

è **analitica** se $\forall z_0\in\Omega$ esiste $R>0$ tale che

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$$

per ogni $z\in B_R(z_0)$ (cioè $|z-z_0|<R$)
con a_k coefficienti opportuni.

Es I polinomi sono funzioni analitiche.

$f(z)=1+z^2$ chi sono i coefficienti a_k?

$$a_k=\begin{cases}1 & \text{se } k=0\\ 1 & \text{se } k=2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$ ok se $z_0=0$.

Se $z_0=1$
$h=z-z_0$

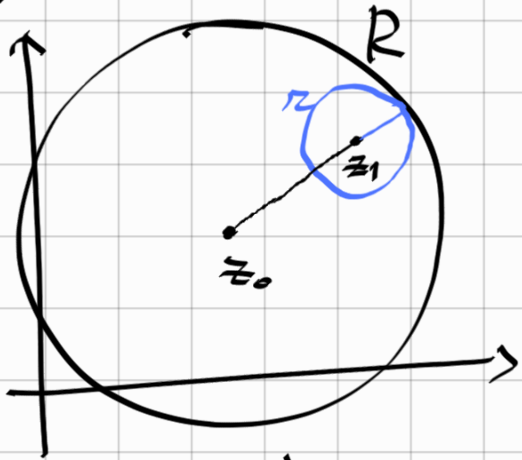
$$1+z^2=1+(z_0+h)^2=1+(1+h)^2$$
$$=1+1+2h+h^2$$
$$=2+2(z-z_0)+(z-z_0)^2$$

i coefficienti sono diversi.

Facciamo lo stesso con le serie di potenze.

Teorema Sia
$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$
(Teorema 4.72 negli appunti)

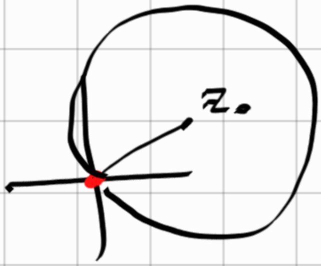
una serie di potenze con raggio di convergenza R.
Allora preso z_1 t.c. $|z_1-z_0|<R$
posto $r = R-|z_1-z_0|$ esistono
b_k tali che $\forall z\in B_r(z_1)$
$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-z_1)^k.$$



(Quindi $f: B_R(z_0)$ è analitica).

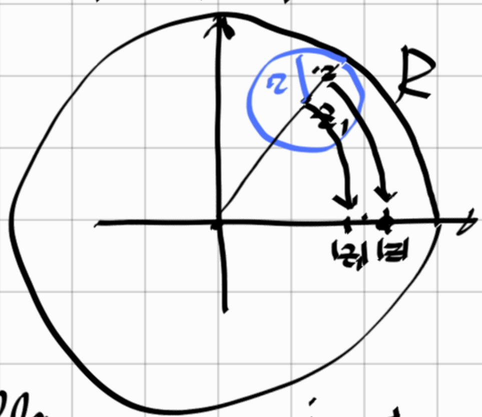
⚠ Le funzioni analitiche possono essere definite su insiemi Ω qualunque (aperto)

Es
$$f(z)=\frac{1}{z} \qquad f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$$
è analitica.



---

dim Supponiamo $z_0=0$. $f(z)=\sum a_k z^k$, $R=$ r. di c.
Sia z_1, $|z_1|<R$, $r=R-|z_1|$.



$$f(z)=f(z_1+h)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_1+h)^n$$
$h=z-z_1$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} h^j z_1^{n-j}$$
← Alla Cauchy

idea $k=n-j$
$$=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{a_{k+j}\binom{k+j}{j} h^j z_1^k}_{a_{nkj}}$$

↳ È vero se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} \left| a_n \binom{n}{j} h^j z_1^{\,n-j}\right| < +\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} |a_n| \cdot \binom{n}{j}\, |h|^j \cdot |z_1|^{n-j}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot \Big(\underbrace{|h|+|z_1|}\Big)^n < +\infty$$

$|h|<r$

visto che $|h|+|z_1|<R$ e visto che $\sum a_n z^n$ è assolutamente convergente in B_R

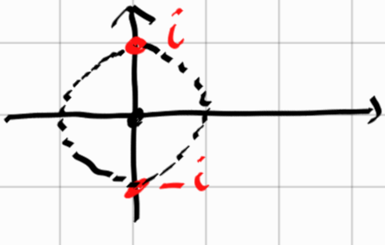
$$f(z) = \dots = \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+j}\binom{k+j}{j} z_1^{k}\right)}_{b_j} \cdot h^j$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} b_j (z-z_1)^j. \qquad \square$$

Esempio $\quad f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ è analitica (almeno) su B_1.

(Oss su $\mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ )

$f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$



è definita su $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k}$$

lacunare

$$= \sum_{j\geq 0}^{+\infty} a_j z^j \qquad a_j = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } j=2k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>Nota</u> $\limsup_{j\to+\infty} \sqrt[j]{|a_j|} = \lim_{j\to+\infty} \sqrt[2j]{|a_{2j}|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|(-1)^k|} = 1.$