ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 11 - 8.4.2024

Riepilogo

$u \in L^p \iff \int |u|^p < +\infty \qquad p \in [1, +\infty)$

$u \in L^\infty \iff \exists M : \quad |u(x)| \leq M \quad \tilde{\forall} x$

DERIVATA DEBOLE

$u \in L^1$ e $v \in L^1$ diremo che v è derivata debole di u se

$$\forall \varphi \in C_c^\infty \qquad \int u \cdot \varphi' = -\int v \cdot \varphi$$

scriveremo $\quad v = u' \quad$ in L^1

SPAZI di SOBOLEV

$$W^{1,p} = \{ u \in L^p : \exists v \in L^p, \ v \text{ derivata debole di } u \} \qquad p \in [1, +\infty]$$

$$W^{1,1} \supseteq W^{1,p} \supseteq W^{1,\infty}$$ se il dominio è limitato

Teorema (di Sobolev) in $n=1$ $\quad (a,b) \subseteq \mathbb{R}$

Se $u \in W^{1,1}(a,b)$ allora $\exists \tilde{u} \in C^0([a,b])$

t.c. $\quad \tilde{u}(x) = u(x) \quad \tilde{\forall} x \in (a,b)$. $\qquad$ "$W^{1,1}(a,b) \subseteq C^0([a,b])$"

Inoltre $\quad \tilde{\forall} x \quad \exists \tilde{u}'(x)$ derivata classica

$\tilde{\forall} x \quad \underbrace{u'(x)}_{\text{derivata debole}} = \tilde{u}'(x)$ $\not\!\!\searrow$

"$W^{1,1} = AC$", "$W^{1,\infty} = Lip$"

Lemma Se $v \in L^1(a,b)$, $u(x) := \int_a^x v(t)\,dt$

allora $u \in W^{1,1}$ e $\underbrace{u' = v}_{\text{in senso debole}}$.

Teorema (Du Bois-Raymond) Sia $u \in L^1_{loc}(a,b)$

Se $\forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)$: $\int_a^b u \cdot \varphi' = 0$

Allora u è costante ($\exists c : u(x) = c \ \tilde{\forall} x$)

OBIETTIVO Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange in $W^{1,p}$!

$$L = L(x,y,z), \ u = u(x) \rightsquigarrow \underbrace{L(x, u(x), u'(x))}$$

Vogliamo che sia integrabile.

in modo che $\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x))\, dx$

$\mathcal{L}$ sia ben definito, finito

cosicché $\mathcal{L} : W^{1,p}(a,b) \to \mathbb{R}$.

Def. (Caratheodory) Sia $L = L(x,y,z)$, $x,y,z \in \mathbb{R}$.
Diremo che L è di Caratheodory se:
(1) $\forall (y,z)$ $\quad x \mapsto L(x,y,z)$ è Lebesgue misurabile
(2) $\tilde{\forall} x$ $\quad (y,z) \mapsto L(x,y,z)$ è continua.
(f è misurabile se $\forall U$ aperto $f^{-1}(U)$ è misurabile)

Teo Se $L = L(x,y,z)$ è di Caratheodory e $u = u(x)$, $v = v(x)$, u, v misurabili. Allora

$$x \mapsto L(x, \underbrace{u(x), v(x)})$$

è misurabile.

dim Passo 1 Supponiamo che u, v siano "semplici":

$$u = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \cdot 1_{E_k} \qquad \lambda_k \in \mathbb{R},\ E_k \text{ misurabili}$$

E_k partizione

$$v = \sum_{k=1}^{N} \mu_k \cdot 1_{F_k} \qquad \mu_k \in \mathbb{R},\ F_k \text{ misurabili}$$

F_k partizione

$$f(x) = L(x, u(x), v(x)) \qquad \text{posto } L_{y,z}(x) := L(x,y,z)$$

$$= \left\{ L_{\lambda_k,\mu_j}(x) \quad \text{se } x \in E_k \cap F_j \right.$$

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{k,j} L^{-1}_{\lambda_k,\mu_j}(U) \cap E_k \cap F_j$$

$\to L^{-1}_{y,z}$ è misurabile perché vale (1) di Carathéodory.

U aperto $\Rightarrow L^{-1}_{\lambda_k,\mu_j}(U)$ è misurabile $\Rightarrow f^{-1}(U)$ è misurabile.

$\Rightarrow f$ è misurabile.

Passo 2 caso generale: u, v sono misurabili.

$\exists\, u_k, v_k$ semplici tali che $u_k \to u$ q.o.
$v_k \to v$ q.o.

$$f(x) = L(x, u(x), v(x))$$

$$f_k(x) = L(x, u_k(x), v_k(x)) \quad \text{è misurabile per il Passo 1.}$$

$k \to \infty \quad \tilde{\forall} x \qquad (u(x), v(x))$

$$f(x) = L(x, u(x), v(x)) \quad \text{perché vale (2) in Carathéodory.}$$

$$f(x) = \lim_k f_k(x) \quad \tilde{\forall} x \Rightarrow f \text{ è misurabile } \square.$$

Eulero-Lagrange in $W^{1,p}$!

<u>Teorema</u> (EL-$W^{1,p}$ per 1). Sia $p \in [1, +\infty)$.

(1) Sia $L = L(x,y,z)$, $x \in [a,b]$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$
L di Carathéodory e inoltre
$\tilde{\forall} x$ $\forall (y,z)$ $\exists \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)$, $\exists \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)$
e $\frac{\partial L}{\partial y}$, $\frac{\partial L}{\partial z}$ sono di Carathéodory.

Ipotesi di struttura

(2) $\forall M > 0$ $\exists h_M \in L^1$, $\exists k_M \in \mathbb{R}$ tali che:

$\tilde{\forall} x$ $\forall y$ $\forall z$:

Ipotesi di crescita

$$|y| \leq M \Rightarrow \left|L(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)\right| \leq h_M(x) + k_M \cdot |z|^p$$

Allora:

(i) Se $u \in W^{1,p}$ $\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x))\, dx$
è ben definito ed è finito.
quindi $\mathcal{L} : W^{1,p} \to \mathbb{R}$.

(ii) Se $u \in W^{1,p}$ è un "minimo debole" per $\mathcal{L}$ cioè

$$\underbrace{\mathcal{L}(u) \leq \mathcal{L}(u + \varepsilon \varphi)} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

e $\forall \varepsilon$ abbastanza piccolo.

Allora $x \mapsto \frac{\partial L}{\partial z}(x, u(x), u'(x))$ è in $W^{1,1}$

e

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial z}(x, u(x), u'(x))}_{W^{1,1}} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), u'(x))}_{L^1} \qquad \square$$

derivata debole

dim. Sia $u \in W^{1,p}$ qualunque.

(i)

$x \mapsto L(x, u(x), u'(x))$ è misurabile (Teo precedente)

$u \in W^{1,p} \subseteq C^0 \quad \exists M \quad |u(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

per ipotesi $\exists\, h_M, k_M$ tali che:

$$\left| L(x, u(x), u'(x)) \right| \leq \underbrace{h_M(x)}_{L^1} + k_M \cdot \underbrace{|u'(x)|^p}_{L^1} \in L^1$$

$$\Uparrow$$

$$u' \in L^p \Leftarrow u \in W^{1,p}$$

$$\mathcal{L}(u) = \int L(x, u(x), u'(x))\,dx$$

esiste finito!

(ii) Sia $u \in W^{1,p}$ un minimo debole. $\forall \varphi \in C_c^\infty$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

$\varepsilon \mapsto \mathcal{L}(\underbrace{u + \varepsilon\varphi})$ ha minimo locale in $\varepsilon = 0$.

Vogliamo fare la derivata $\frac{d}{d\varepsilon}$ in $\varepsilon = 0$.

$$\frac{\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi) - \mathcal{L}(u)}{\varepsilon} = \int_a^b \frac{L(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi') - L(x,u,u')}{\varepsilon}\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{L(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi') - L(x, u, u'+\varepsilon\varphi')}{\varepsilon} + \frac{L(x, u, u'+\varepsilon\varphi') - L(x,u,u')}{\varepsilon} \right]$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x, u+\theta\varphi, u'+\varepsilon\varphi')\,\varphi(x) + \frac{\partial L}{\partial z}(x, u, u'+\tau\varphi')\,\varphi'(x) \right] dx$$

$\exists\, \theta = \theta(x, \varepsilon) \quad |\theta| \leq |\varepsilon|$

$\exists\, \tau = \tau(x, \varepsilon) \quad |\tau| \leq |\varepsilon|$

Vorrei fare il limite per $\varepsilon \to 0$

$$\tilde{\forall} x \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x, u+\theta\varphi, u'+\varepsilon\varphi') \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), u'(x))$$

$\theta \to 0$ se $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, u, u'+\tau\varphi') \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\partial L}{\partial z}(x, u(x), u'(x))$$

Per poter scambiare $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^b = \int_a^b \lim\limits_{\varepsilon\to 0}$

devo dominare la successione delle integrande.

$$\left|\frac{\partial L}{\partial y}(x, \underbrace{u+\theta\varphi}, u'+\varepsilon\varphi')\right| \leq \underbrace{h_M(x)}_{L^1} + k_M \cdot \underbrace{|u'+\varepsilon\varphi'|^p}_{L^1}$$

ipotesi $\left|\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z)\right| \leq h_M(x) + k_M \cdot |z|^p$ se $|y| \leq M$

$$|u+\theta\varphi| \leq |u| + |\theta|\cdot|\varphi| \leq |u| + |\varphi| =: M$$

$|\theta| \leq |\varepsilon| \leq 1 \qquad W^{1,p} \subseteq C^0 \subseteq L^\infty$

[Oss: $|a+b|^p \leq \begin{cases} |2a|^p & \text{se } |a|\geq|b| \\ |2b|^p & \text{se } |b|\geq|a| \end{cases} \leq |2a|^p + |2b|^p = 2^p\cdot|a|^p + 2^p\cdot|b|^p$]

$$|u'+\varepsilon\varphi'|^p \leq 2^p \underbrace{|u'|^p}_{\substack{L^1 \\ u\in W^{1,p}}} + \underbrace{2^p|\varepsilon|^p|\varphi'|^p}_{L^\infty}$$

$$\leq 2^p|u'|^p + 2^p|\varphi'|^p \in L^1$$

indipendente da ε.

Analogamente

$$\left|\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'+\tau\varphi)\right| \le h_M(x) + k_M \cdot |u'+\tau\varphi|^p$$

$$\le h_M(x) + k_M \cdot \left(2^p |u'(x)|^p + 2^p \cancel{|\tau|^p} |\varphi(x)|^p\right)$$

$$\le \underbrace{h_M(x)}_{L^1} + k_M 2^p \cdot \underbrace{|u'(x)|^p}_{L^1} + k_M \cdot 2^p \underbrace{|\varphi(x)|^p}_{L^\infty}$$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial y}(x,u+\theta\varphi,u'+\varepsilon\varphi')}_{\le L^1} \underbrace{\varphi}_{L^\infty} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u'+\tau\varphi)}_{\le L^1} \cdot \underbrace{\varphi'}_{L^\infty} \le h \in L^1$$

C'è dominazione! Posso scambiare il limite con l'integrale:

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\right]_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u')\cdot\varphi + \frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')\varphi'$$

Visto che $\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)$ ha un minimo locale per $\varepsilon=0$ si deve avere:

$$\boxed{\forall \varphi \in C_0^\infty: \quad \int_a^b \left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u')}_{L^1}\varphi(x) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u')}_{L^1}\varphi'(x)\right] dx = 0}$$

E.L. forma integrale

Idea: Integro $\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\varphi$ per parti.

Sia $g(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), u'(x))$ $\qquad g \in L^1$

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt \qquad G \in W^{1,1}$$

$$\int g(x)\varphi(x) = -\int G(x)\varphi'(x)$$ perchè $G' = g$

in senso debole

$\forall \varphi \in C_c^\infty$ $\qquad \int_a^b \left[-G(x) + \frac{\partial L}{\partial z}(x, u(x), u'(x)) \right] \varphi'(x)\, dx = 0$

Du Bois-Reymonds $\Rightarrow$ $\underbrace{-G(x)}_{W^{1,1}} + \frac{\partial L}{\partial z}(x, u, u') = \underbrace{c}_{W^{1,1}}$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, u, u') = c + G(x) \in W^{1,1}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x, u, u') = G'(x) = g(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, u, u')$$

derivata debole

$\square$