ELEMENTI DI CALC. VAR.

$$\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x))\, dx$$

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{R}^n$$

DOMANDE:

- $\exists$ MINIMO (LOC. O GLOBALE), CON COND. AL BORDO
- UNICITÀ
- PROPRIETÀ (REGOLARITÀ)
- ESPRESSIONE ESPLICITA

METODO DIRETTO PER ESISTENZA DEI MINIMI

FISSIAMO UN INSIEME DI FUNZIONI A E CERCHIAMO $\min_{u \in A} \mathcal{L}(u)$

FISSIAMO UNA SUCCESSIONE MINIMIZZANTE

$u_n \in A$ T.C. $\mathcal{L}(u_n) \to \inf_A \mathcal{L}$. IN PARTICOLARE $\mathcal{L}(u_n) \leq C \ \forall n$,

SE

1. $\exists\, u$ T.C. $u_{n_k} \xrightarrow[k]{} u$ in A (COMPATTEZZA DI $A \cap \{\mathcal{L} \leq C\}$)

2. $\mathcal{L}(u) \leq \liminf_k \mathcal{L}(u_{n_k})$ (SEMICONT. DI $\mathcal{L}$ IN A)

$\Rightarrow u$ È UN MINIMO (GLOBALE) DI $\mathcal{L}$ IN A.

OSS: SE $\mathcal{A}$ È PIÙ "GENERALE" DI C^1

SI PONE IL PROBLEMA DELLA REGOLARITÀ (C^1) DI u

SPAZI DI FUNZIONI:

- FUNZIONI LIPSCHITZIANE

$Lip([a,b])$: $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ T.C. $|u(x)-u(y)|\leq C|x-y|$

- FUNZIONI ASSOLUT. CONTINUE $AC([a,b])$, $W^{1,1}([a,b])$

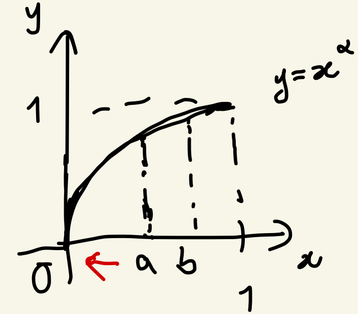
$u:[a,b]\to\mathbb{R}$ T.C. $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ T.C. $\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)\leq\delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{N}|u(b_k)-u(a_k)|\leq\varepsilon$

DOVE $I_k=[a_k,b_k]\subseteq[a,b]$ SONO INTERVALLI DISGIUNTI

$u\in Lip \Rightarrow u\in AC \Rightarrow u$ CONT.

NON SONO VERE $\Leftarrow$

ES: 1 $u(x) = x^{\alpha}$ $\quad x \in [0,1] \quad \alpha \in (0,1)$



$u \in AC \setminus Lip$

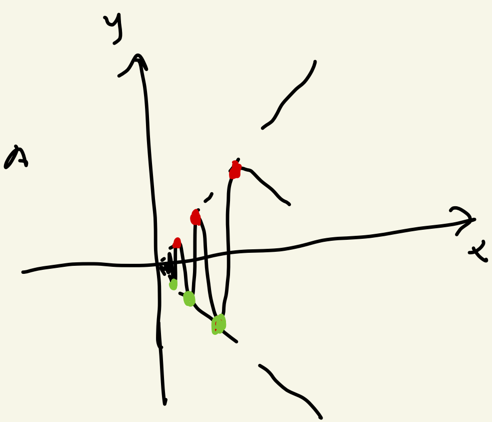
$a < b \Rightarrow u(b) - u(a) \leq u(b-a)$ $\quad$ [SUBADDITIVA]

e $x \to u(b+x) - u(a+x)$ DECRESCENTE IN x

$$\Rightarrow \sum u(b_k) - u(a_k) \leq u\left(\sum b_k - a_k\right) = \left(\sum b_k - a_k\right)^{\alpha} \leq \delta^{\alpha}$$

BASTA PRENDERE $\varepsilon = \delta^{\alpha}$.

2 $u(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad$ CONTINUA



$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow u(x) = x$

$\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow u(x) = -x$

$$a_k = \frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}} \qquad k \geq k_0 \qquad k \in \mathbb{N} \qquad u(a_k) = -a_k$$

$$\wedge$$

$$b_k = \frac{1}{2k\pi - \frac{3}{2}\pi} \qquad u(b_k) = b_k$$

$[a_k, b_k] \subseteq [0,1]$ DISGUNTI

$$\sum_{k=k_0}^{N} u(b_k) - u(a_k) \geq \sum_{k=k_0}^{N} u(b_k) = \sum_{k=k_0}^{N} b_k \geq \sum_{k=k_0}^{N} \frac{1}{2k\pi} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$$

$$\sum_{k=k_0}^{N} b_k - a_k \leq b_{k_0} \leq \delta \quad \Rightarrow \quad u \notin AC([0,1])$$

SPAZI DI SOBOLEV (1 DIM.)

DEF: $L^p([a,b]) = \{u : [a,b] \to \mathbb{R}$ MIS. T.C. $\int |u|^p < +\infty\} \big/ \sim \qquad p \in [1,\infty)$

$u \sim v$ SE $u - v = 0$ Q.O. IN $[a,b]$

SP. DI BANACH CON LA NORMA

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

PROP: $C_c^\infty([a,b]) = \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ T.C. $\varphi \in C^\infty$ E $\operatorname{supp}\varphi \subseteq (a,b)\}$

È UN SOTTOSPAZIO DENSO DI L^p CIOÈ

$\forall u \in L^p \ \exists \varphi_n \in C_c^\infty$ T.C. $\|u - \varphi_n\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u - \varphi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

DEF: (SPAZI DI SOBOLEV)

$p \in [1, +\infty]$ $\quad u \in W^{1,p}$ SE $u \in L^p([a,b])$ E $\exists\, g \in L^p([a,b])$ T.C.

$$\int_a^b u \varphi' \, dx = - \int g \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty([a,b])$$

g SI DICE DERIVATA DEBOLE DI u

E SI INDICA CON $u' \in L^p$

$W^{1,p}$ È UNO SPAZIO DI BANACH CON LA NORMA

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.$$

$p = 2$ E CONSIDERO LA NORMA EQUIVALENTE $\|u\|_{W^{1,2}} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(\int_a^b u^2 + u'^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$W^{1,2}$ DIVENTA UNO SP DI HILBERT

OSS: $u \in C^1$ $\quad \int u\varphi' = -\int u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$

$u \in W^{1,p}$ $\forall p$ E u' È LA DERIVATA DEBOLE

D'ALTRO CANTO CI SONO MOLTE $u \in W^{1,p} \setminus C^1$

$u(x) = |x| \in W^{1,p}$ $\forall p$ MA $u \notin C^1$

$u(x) = \sqrt{x}$ $\quad x \in [0,1]$ $\qquad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ DER. DEBOLE

$$\int_0^1 |u'|^p = \frac{1}{2^p} \int_0^1 \frac{1}{x^{p/2}} < +\infty \iff p < 2$$

$\Rightarrow \sqrt{x} \in W^{1,p}$ PER $p < 2$

OSS: $L^p(I) \subseteq L^{p'}(I) \quad p > p' \Rightarrow W^{1,p}(I) \subseteq W^{1,p'}(I) \quad p > p'$

PROP: $u \in W^{1,p} \Rightarrow \exists$ RAPPRESENTANTE $\tilde{u}$ T.C.

(DIM. DOMANI)

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)\,dt \quad \forall\, x, y \in [a,b]$$

IN PART. $\tilde{u}$ È CONTINUA.

COR: $u \in W^{1,p} \Rightarrow \tilde{u}$ A.C.

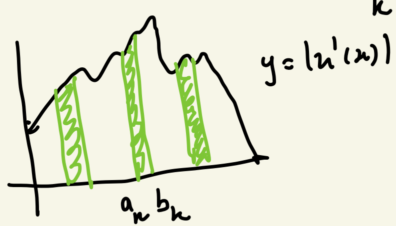
DIM: $I_k = [a_k, b_k] \subseteq [a,b]$

$|u'| \in L^1([a,b]) \quad |u'| \geq 0$

$$\sum_k |\tilde{u}(b_k) - \tilde{u}(a_k)| = \sum_k \int_{a_k}^{b_k} |u'| = \int_{\cup I_k} |u'| \leq \varepsilon \qquad |\cup I_k| \leq \delta$$

ASS. CONT. DELL'INTEGRALE

$$\int_{\cup I_k} |u'| = \mathcal{L}^2\left(\{(x,y) : x \in \cup I_k,\ 0 \leq y \leq |u'(x)|\}\right)$$



PROP: $u \in W^{1,1} \Leftrightarrow \tilde{u} \in AC$ (I DUE SPAZI COINCIDONO)

COR: $u \in W^{1,\infty} \Rightarrow |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \int_x^y |u'| \leq C|x-y|$

$C = \|u'\|_{L^\infty}$

CIOÈ $\tilde{u}$ È LIPSCHITZ.

PROP: $u \in W^{1,\infty} \Leftrightarrow \tilde{u} \in Lip$

OSS: $u \in W^{1,1} \Rightarrow \exists$ RAPPR. CONT.

$\Rightarrow u = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ NON STA IN NESSUNO SP DI SOBOLEV

DEF: $W_0^{1,p}([a,b]) = \{u \in W^{1,p}([a,b]) : \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0\} = \overline{C_c^\infty([a,b])}^{W^{1,p}}$

SOTTOSPAZIO CHIUSO DI $W^{1,p}([a,b])$