ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 75 - 17.4.2023

Eq. lineari a coefficienti costanti di ordine n:

$$u^{(n)} + a_{n-1} \cdot u^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot u' + \underbrace{a_0 \, u} = b(x) \quad (1) \text{ non omogenea.}$$
$$= 0 \quad (2) \text{ omogenea associata.}$$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

P polinomio associato alla eq. lineare

$u(x) = e^{\lambda x}$ con λ zero del polinomio P

allora u è soluzione dell'eq. (2).

(già visto) $u'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$u''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$D^2 = D \circ D$

$D^n = \underbrace{D \circ D \circ \dots D}_{n}$

L'eq. (2) si scrive nella forma:

(2) $\boxed{P(D)[u] = 0}$ $\qquad P(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I$

è un operatore lineare.

ES $u'' - 3u' + 2u = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

$P(D) = D^2 - 3D + 2I$

$P(D)[u] = D^2 u - 3Du + 2u = u'' - 3u' + 2u$

Se fattorizziamo P: $\quad P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$

(2) $\quad P(D)[u] = (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \dots (D - \lambda_n)^{m_k} [u] \overset{?}{=} 0$

$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$

oss 1. $\boxed{(D - \lambda) u = 0}$ $\qquad u' = \lambda u \qquad u = c \cdot e^{\lambda x}$

$D - \lambda = D - \lambda I \qquad (D - \lambda) u = Du - \lambda u$

$\to$ u è autovettore di D con autoval. λ

$u(x) = e^{\lambda_j x}$ sono tutte soluzioni.

$$(D-\lambda)(D-\mu) = (D-\mu)(D-\lambda)$$
$$= D^2 - (\lambda+\mu) D + \mu\lambda$$

$Du = u'$

infatti
$$(D-\lambda)(D-\mu)[u] = (D-\lambda)(u' - \mu \cdot u)$$
$$= (u' - \mu u)' - \lambda(u' - \mu u)$$
$$= u'' - \mu u' - \lambda u' + \lambda\mu u = u'' - (\lambda+\mu)u' + \lambda\mu \cdot u$$
$$= \left(D^2 - (\lambda+\mu) D + \lambda\mu\right)[u]$$

Ovviamente se scambio μ e λ ottengo lo stesso risultato!

Se $m_j = 1 \ \forall j$ $\quad \lambda_1 \dots \lambda_n$ sono radici distinte.

ho n soluzioni indipendenti: $u_k = e^{\lambda_k x}$

Tutte le sol. di (2) sono combinazioni lineari di queste.

$$u(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + A_n e^{\lambda_n (x)}$$

$A_1 \dots A_n$ costanti arbitrarie $\quad A_j \in \mathbb{R}$.

Se $m_j > 1$? $\quad (D - \lambda_j) u = 0$ ha altre sol?

Oss $\quad u(x) = q(x) \cdot e^{\mu x} \quad q$ polinomio

$$(D-\lambda)[u] = (D-\lambda)\, q(x)\cdot e^{\mu x}$$

$$= \left(q(x)\cdot e^{\mu x}\right)' - \lambda\, q(x)\, e^{\mu x}$$

$$= q'(x)\, e^{\mu x} + q(x)\cdot \mu\, e^{\mu x} - \lambda\, q(x)\, e^{\mu x}$$

$$= \left[q'(x) + (\mu-\lambda)\, q(x)\right] e^{\mu x} = \tilde{q}(x)\, e^{\mu x}$$

Se $\lambda \neq \mu$ otteniamo $\tilde{q}$ con lo stesso grado di q.

Se $\lambda = \mu$ $\tilde{q}(x) = q'(x)$ ha grado di uno inferiore al grado di q.

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda_k & \ddots & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Dunque $(D-\lambda)^m u = 0$

ha come soluzioni:

$u_1(x) = e^{\lambda x}$

$\rightarrow u_2(x) = x\cdot e^{\lambda x}$ $\qquad (D-\lambda)[x e^{\lambda x}] = x' e^{\lambda x} = e^{\lambda x}$

$u_3(x) = x^2 e^{\lambda x}$ $\qquad (D-\lambda)^2[x e^{\lambda x}] = 0$

$\vdots$

$u_{m-1} = x^{m-1} e^{\lambda x}.$

$\uparrow$

In generale tutte le sol. di (2) sono combinazioni lineari di queste:

$$u(x) = \underbrace{A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2\, x\, e^{\lambda_1 x} + \dots + A_{m_1} x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}}_{m_1 \text{ addendi}} + \dots \qquad (\lambda_1)$$

$$\dots \qquad (\lambda_2)$$

$$\vdots$$

$$A_{m_k} x^{m_k-1} e^{\lambda_k x}. \qquad (\lambda_k)$$

Esempio $\quad u^{V} - 2u''' + u' = 0 \qquad u^{V} = u'''''$

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 + \lambda$$
$$= \lambda\,(\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1)$$
$$= \lambda \cdot (\lambda^2 - 1)^2 = \lambda\,(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$ $\qquad \lambda_3 = -1$, $m_3 = 2$

(ovvero: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$, $\lambda_5 = -1$)

Le 5 soluzioni indipendenti sono:

$$u_1(x) = e^{0x} = 1$$
$$u_2(x) = e^{1\cdot x} = e^{x}$$
$$u_3(x) = x\,e^{1\cdot x} = xe^{x}$$
$$u_4(x) = e^{-1\cdot x} = e^{-x}$$
$$u_5(x) = x\,e^{-1\cdot x} = xe^{-x}$$

Tutte le soluzioni sono:

$$u(x) = A + Be^{x} + Cxe^{x} + De^{-x} + Exe^{-x}$$
$$= A + (B + Cx)e^{x} + (D + Ex)e^{-x}$$

Es $\quad u''' + 3u'' + 3u' + u = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$
$$= (\lambda+1)^3 \qquad \lambda_1 = -1 \quad m_1 = 3$$

Tutte le soluzioni:
$$u(x) = (A + Bx + Cx^2)\, e^{-x}.$$

COSA FACCIAMO SE LE RADICI SONO COMPLESSE?

(1) Se vogliamo tutte le sol. complesse non cambia niente. (ma $A, B, C \dots$ sono coefficienti complessi)

(2) Se vogliamo le sol. reali basta osservare che:

$\lambda = \alpha \pm i\beta$ $\qquad$ $e^{\bar{\lambda} x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x \pm i \operatorname{sen} \beta x)$

$$\boxed{\operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{ e^{\lambda x}, e^{\bar{\lambda} x} \} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{ e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x \}}$$

Se P ha coefficienti reali, se $P(\lambda) = 0$ anche $P(\bar{\lambda}) = 0$.

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

Esempio $\qquad u'' + \omega^2 u = 0 \qquad \omega$ fissato.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = (\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega) \qquad [\lambda^2 = -\omega^2]$$

$\lambda_1 = i\omega$

$\lambda_2 = -i\omega$

Le sol. complesse sono:

$$u(x) = A e^{i\omega} + B e^{-i\omega}$$

Le sol. reali sono:

$$u(x) = C \cos(\omega x) + D \sin(\omega x)$$
$$= E \cdot \sin(\omega x + \varphi)$$

Esempio $\boxed{u''+u'+u=0}$

$$P(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1 \qquad \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

[Tutte le sol. complesse sono:

$$u(x)=A\,e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x}+B\,e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x}$$
]

Tutte le sol. reali sono:

$$u(x)=A\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

[Nascosta c'è questa osservazione]

Lemma Se $u_1,\dots,u_n$ sono funzioni reali indipendenti

se $h(x)=c_1\cdot u_1(x)+\dots+c_n\cdot u_n(x)$

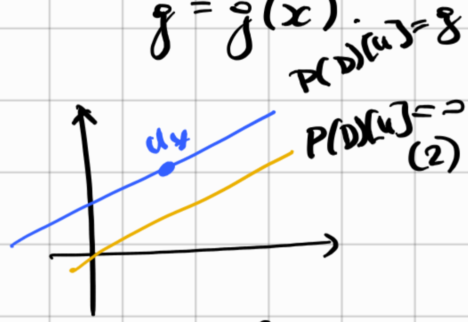
con $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{C}$.

Allora h è reale $\iff$ $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$.

EQ. NON OMOGENEE

$$P(D)[u]=g \qquad (1)$$

$g=g(x)$



Se u_* è una sol. di (1)
tutte le sol. sono:

$$u(x)=u_*(x)+u_0(x)$$

Dove u_0 è la soluzione generale di (2) (omogenea associata)

Basta trovare una sol. particolare.
Abbiamo 2 metodi

METODO DI SIMILARITA' (+ semplice, − generale)

Se $\quad P(D)[u] = \underbrace{q(x)}\cdot e^{\mu x}$ con q polinomio.

posso trovare una sol. della forma:

$$u_*(x) = \tilde{q}(x)\cdot x^m e^{\mu x}$$

con $\deg \tilde{q} = \deg q$
m = molteplicità di μ come radice di P.

Perché funziona? Scrivo $\quad P(D) = (D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_k)$

$- - - .$

Esempio $\quad u'' - u = 3xe^{2x} \qquad (1)$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

Le sol. dell'omogenea: $\quad u'' - u = 0 \qquad (2)$
sono $\quad u_0(x) = A e^{x} + B e^{-x}$

Una sol. particolare di (1) è della forma:

$$u_*(x) = (C + Dx)e^{2x}\cdot \cancel{x^m} \qquad \mu = 2 \quad m = 0$$

$$u_*' = (D + 2C + 2Dx)\,e^{2x}$$

$$u_*'' = (2D + 2D + 4C + 4Dx)\,e^{2x} = (4D + 4C + 4Dx)\,e^{2x}$$

Butto u_* in (1):

$$u_*'' - u_* = (\underbrace{4D + 3C + 3Dx}) e^{2x} \stackrel{!}{=} \underbrace{3x} e^{2x}$$

$$\begin{cases} 3D = 3 \\ 4D + 3C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 1 \\ C = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$u_* = \left(x - \frac{4}{3}\right) e^{2x}$$

Tutte le sol. di (1) sono:

$$u(x) = u_* + u_0 = \left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot e^{2x} + Ae^{x} + Be^{-x}$$