ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 63 - 13. 3. 2023

<u>Teorema</u> (continuità dell'integrale).
Se f è R-integrabile su $[a,b]$
limitata.
allora $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \int_a^x f = \int_a^{x_0} f$.

<u>dim</u> $F(x) = \int_a^x f$. Dobbiamo verificare che F è continua in x_0.

$$\left|F(x) - F(x_0)\right| = \left|\int_{x_0}^x f\right| \leq M \cdot |x - x_0|$$

ma f è limitata: $-M \leq f \leq M$

$$-M(\beta-\alpha) = \int_\alpha^\beta (-M) \leq \int_\alpha^\beta f \leq \int_\alpha^\beta M = M(\beta-\alpha)$$

$\square$

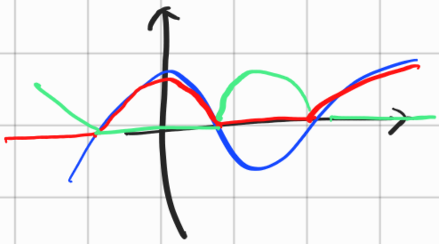
<u>Teorema</u> (proprietà di reticolo)
Se f è R-integrabile su $[a,b]$ anche $|f|$ lo è. E inoltre

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Inoltre anche f^+ e f^- sono R-integrabili.

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$



<u>dim</u> <u>Oss</u>

$$f = f^+ - f^-$$
$$|f| = f^+ + f^-$$
$$f^- = (-f)^+$$

Basta mostrare che f^+ è R-integrabile.

$$\sup f^+(A) - \inf f^+(A) \leq \sup f(A) - \inf f(A)$$

$$\Uparrow$$

$$|f^+(x) - f^+(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

$\uparrow$ banale

$$\Downarrow$$

$$S^*(f^+, P) - S_*(f^+, P) \leq S^*(f, P) - S_*(f, P)$$

$$\left|\int f\right| \overset{?}{\leq} \int |f|$$

$$\left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \int f^+ + \int f^-$$

$\uparrow$ $|A - B| \leq |A| + |B|$ $\square$

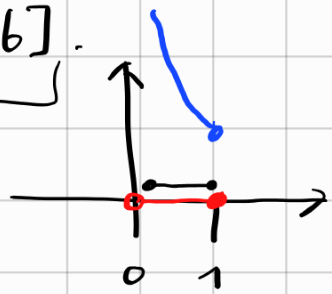
INTEGRALI IMPROPRI (o GENERALIZZATI).

Vogliamo dare senso a: • $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$

• $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$

<u>Def</u> Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione localmente (limitata e) R-integrabile. $a \in [-\infty, b)$

Cioè: per ogni $\alpha \in (a,b]$ f è (limitata) e R-integrabile su $[\alpha, b]$.



Allora ha senso fare il limite:

$$\int_a^b f \doteq \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f \qquad (*)$$

Oss se f è (limitata) R integrabile su tutto $[a,b]$ allora $\displaystyle\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f = \int_a^b f$. $\quad a \neq -\infty$

Diremo che $\int_a^b f$ è <u>convergente</u> se il limite $(*)$ esiste ed è finito

diremo che $\int_a^b f$ è <u>divergente</u> se il limite $(*)$ esiste ma è $+\infty$ o $-\infty$

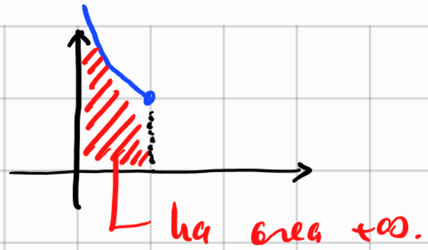
diremo che $\int_a^b f$ è <u>indeterminato</u> se il limite $(*)$ non esiste.

Diremo che f è <u>integrabile</u> su $(a,b]$ (in senso improprio) se $\int_a^b f$ è convergente.

Esempio 1 $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ è divergente.

(1) $\frac{1}{x}$ è continua $\Rightarrow$ è localmente R-integrabile

(2) $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha \to 0^+} \left[\ln x\right]_\alpha^1 =$$



$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \left(-\ln \alpha\right) = +\infty$$

Esempio 2

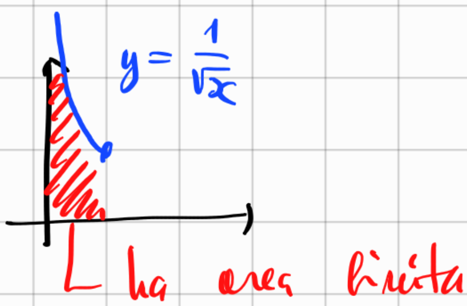
$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \text{ è } \begin{cases} \text{convergente} & p<1 \\ \text{divergente} & p \geq 1 \end{cases}$$

Se $p=1$ già visto.

Se $p \neq 1$

$$\int_\alpha^1 \frac{1}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\alpha^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{\alpha^{1-p}}{1-p}$$

$$\xrightarrow{\alpha\to 0^+} \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{se } p<1 \\ +\infty & \text{se } p>1 \end{cases}$$



Esempio 3

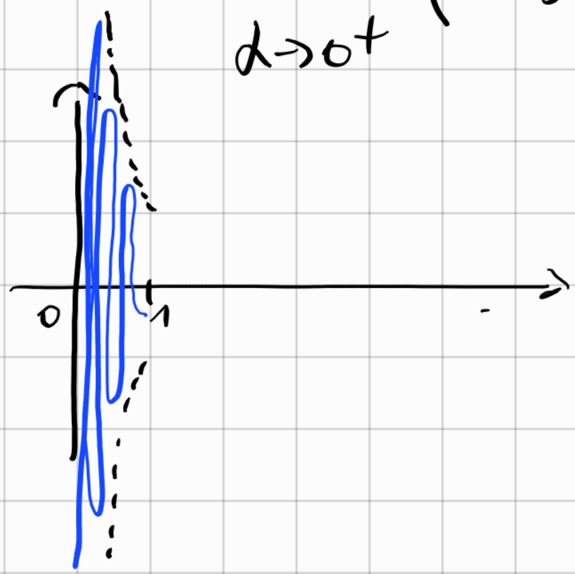
$$F(x) = -\sin\frac{1}{x}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

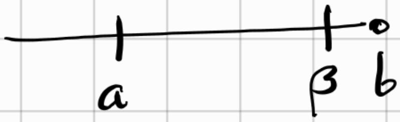
$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to 0^+} \left[F\right]_\alpha^1$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \left(-\sin 1 + \sin\frac{1}{\alpha}\right) \text{ non esiste.}$$



Def se $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ diremo che f è localmente (limitata e) R-integrabile su $[a,b)$ se $\forall\,\beta\in[a,b)$ f è (limitata e) R-integrabile su $[a,\beta]$.



Si definisce

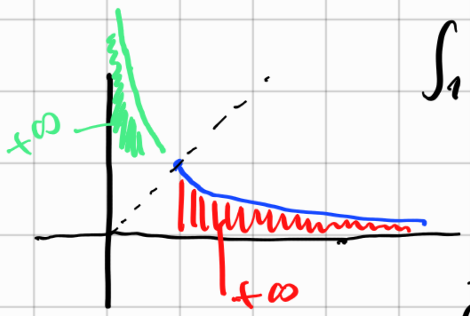
$$\int_a^b f = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f$$

Si ripetono tutte le definizioni di prima: $\int_a^b f$ può essere <u>convergente</u>, <u>divergente</u> o <u>indeterminato</u>. Se è convergente diremo che f è integrabile in senso improprio su $[a,b)$.

<u>Esempi</u> con $b=+\infty$.

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ è divergente

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\ln\beta = +\infty.$$



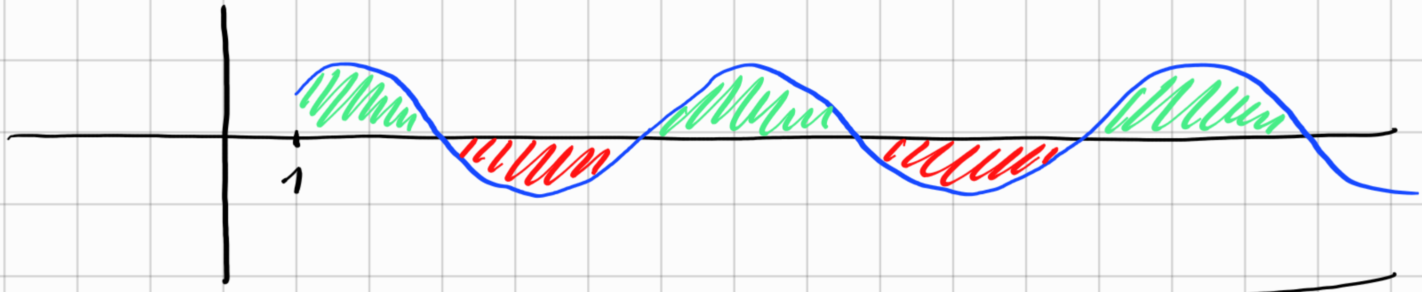
<u>Esempio 2</u>

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p} = \begin{cases}\text{convergente se } p>1\\ \text{divergente se } p\le 1.\end{cases}$$

(verifica per casa)

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin x\,dx$ è <u>indeterminato</u>

$\displaystyle\int_1^{\beta}\sin x\,dx = -\cos\beta+\cos 1$ non ha limite per $\beta\to+\infty$.



<u>Def</u> Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $-\infty\le a<b\le+\infty$.
diremo che f è localmente R-integrabile su (a,b) se f è R integrabile su $[\alpha,\beta]$ per ogni
$a<\alpha\le\beta<b$.
(In generale $f:A\to\mathbb{R}$ è localmente R-integrabile se $\forall\,[\alpha,\beta]\subseteq A$ f è R-integr. su $[\alpha,\beta]$.)

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b$$

con $c\in(a,b)$

su (a,b) $\quad$ $(a,c]$ $\quad$ $[c,b)$

se la somma si può fare.
(non ha senso se:
1. uno dei due integrali a destra è indeterminato
2. entrambi gli integrali a destra sono divergenti a infiniti di segno opposto
$(+\infty)+(-\infty)$
$(-\infty)+(+\infty)$.

questa definizione non dipende da c.

$$\int_a^c f = \int_a^{c'} f + \int_{c'}^c f.$$

$\alpha\to a^+$ $\quad$ $\alpha\to a^+$ $\quad$ proprio $\in\mathbb{R}$

$$\int_\alpha^c f \qquad \int_\alpha^{c'} f$$

L'integrale è <u>convergente</u> se entrambi gli integrali a destra lo sono

$$\begin{cases} \text{indeterminato} & \text{se } (1) \text{ e } (2) \\ \text{divergente} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente.

abbiamo già visto che $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente

ovviamente $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente.

$\uparrow$ e^{-x^2} è pari.

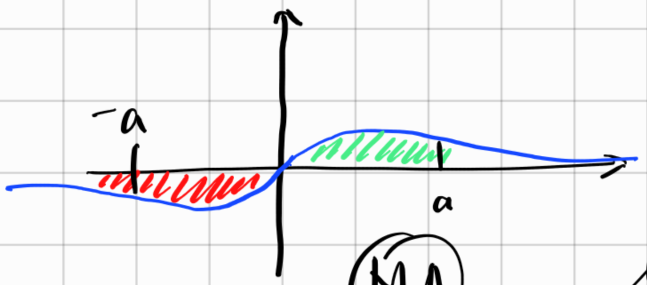
Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ è divergente

$$\int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = (+\infty)+(+\infty) = +\infty.$$

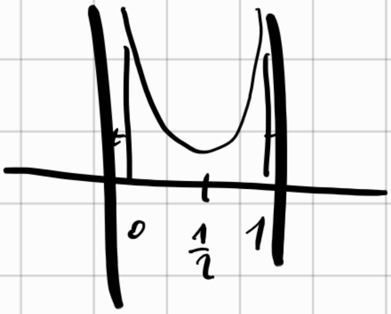
Esempio 3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ indeterminato perché:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\infty$$



MA $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \frac{x}{1+x^2} = 0.$



$$\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$$