ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 47 - 3.2.2023

Sviluppo di Taylor del binomiale:

$$\longrightarrow \quad (1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}^{n \text{ fattori}}}{n!}$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{x}{3} + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{x}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-x)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot x^k$$

Esempio

$$\text{"}P-10\%\text{"} = P\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right)$$

$$\text{"}P+10\%\text{"} = P\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)$$

$$1-x = \frac{1}{1+x} + o(x)$$

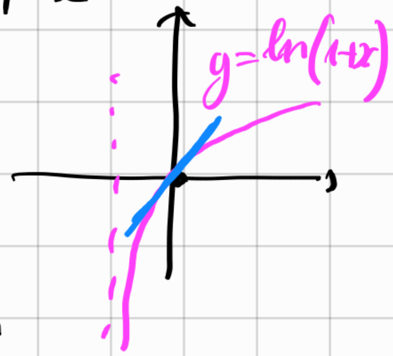
Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari per $x \to 0$

$\sin x$, $\cos x$, e^x fatto. $\quad$ $\tg x$ fatto.

$(1+x)^\alpha$ fatto

- $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n)$$



Il polinomio di Taylor di ordine $(n+1)$ per f è un polinomio $P(x)$ che ha derivata

$$P'(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n \cdot x^n$$

$$P(x) = c + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\left[\begin{array}{l} D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ \ker D = \{ c : c \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} \end{array} \right]$$

$$P(0) = c$$
$$\shortparallel$$
$$f(0) = 0$$

$$P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \left[= \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \right]$$

$$f'(x) = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$P'(x) = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} \longleftarrow \boxed{\text{Formula di Taylor resto di Peano "viceversa"}}$$

$$P(x) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{C}} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\uparrow$

pol. di Taylor di ordine $2n+1$ per $f(x) = \operatorname{arctg} x$

• $f(x) = \arcsin x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{2}(-x^2)^2 + \dots + \frac{\overbrace{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}^{n \text{ fattori}}}{n!}(-x^2)^n + o(x^{2n})$$

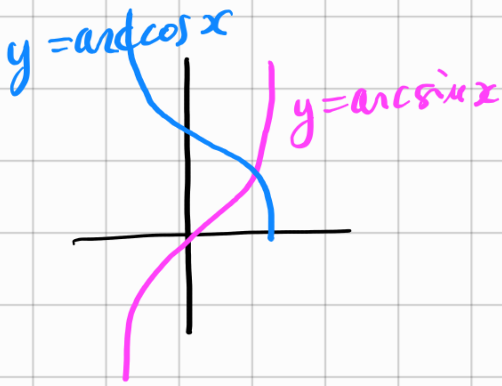
$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{3\cdot 1}{2\cdot 2}}{2}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}(-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$2^n n! = (2n)!!$$

$$P'(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$P(x) = \overset{0}{\overset{\parallel}{C}} + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}\cdot x^{2n+1}$$

• $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$



$$\left[\begin{array}{l} 7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1 \\ 6!! = 6\cdot 4\cdot 2 \end{array}\right]$$

Esercizio $f(x) = \arcsin(x^2) - \arcsin^2 x$ $\left[\begin{array}{l} = O(x^4) \\ (f \text{ è pari}) \end{array}\right]$

• $x_0 = 0$ è un punto critico?

• è un max o min locale? ←

• calcolo $f^{IV}(0)$

$\arcsin x = x + o(x)$ $\arcsin x^2 = x^2 + o(x^2)$

$(\arcsin x)^2 = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$

$$f(x) = \left(x^2 + o(x^2)\right) - \left(x^2 + o(x^2)\right) = o(x^2)$$

$$f(x) = P(x) + o(x^2)$$

P. di Taylor di ordine 2

$$= \underset{\underset{0}{\parallel}}{f(0)} + \underset{\underset{0}{\parallel}}{f'(0)}\cdot x + \underset{\underset{0}{\parallel}}{\frac{f''(0)}{2}}x^2 + o(x^2)$$

$f'''(0) = 0$ perché f è pari

$$f(x) = \underbrace{\boxed{\frac{f^{IV}(0)}{4!}}x^4}_{} + o(x^4)$$

← Pol. di Taylor di ordine 4.

Es Se f è pari $f^{(2n+1)}(0) = 0$

$D\, f(-x) = -f'(-x)$

se f è pari f' è dispari $\Rightarrow f'(0) = 0$

se f è dispari f' è pari

potrei mettere 4

Sviluppiamo all'ordine 4.

$$\arcsin x = \underbrace{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$f(x) = \arcsin(x^2) - \arcsin^2(x)$$

$x \to 0$

$$= x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

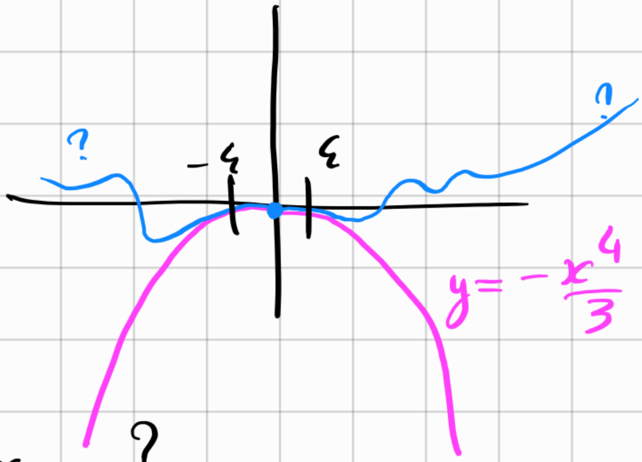
$$= \cancel{x^2} + \cancel{\frac{x^6}{6}} + \cancel{o(x^6)} - \left(\cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{x^4}{3}} + o(x^4)$$

$$= P_4(x) = \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

$$f^{IV}(0) = -\frac{4!}{3} = -8$$

$y = -\frac{x^4}{3}$ ha un massimo in $x=0$.



- Posso dire che $f(x)$ ha un massimo locale (relativo) in $x=0$?

$$\exists \varepsilon>0 : \forall x : |x|<\varepsilon \cdot f(0) \geq f(x)$$

Sì!

$$f(x) = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$
$$= x^4 \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{3} + o(1)\right]}_{}$$

per la permanenza del segno è negativo in un intorno di 0.

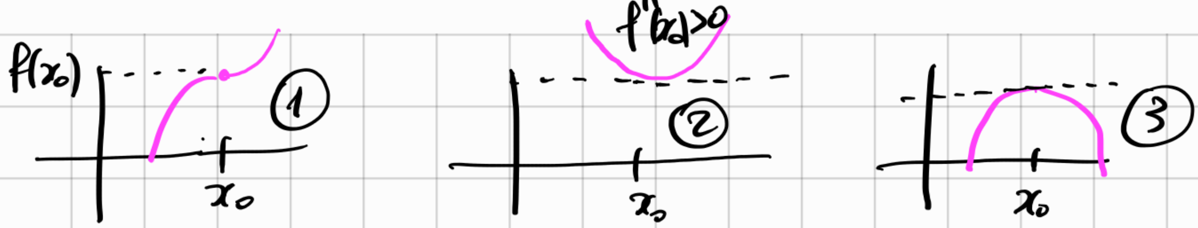
Criterio all'ordine superiore per determinare massimi e minimi locali:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \qquad x \to x_0$$

Se x_0 è un punto di max o min locale

$\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$ (Fermat)

I condizione necessaria a I ordine. (se valgono le ipotesi di Fermat)



$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

Se $f''(x_0) \overset{<}{>} 0$: ho un $\overset{\text{massimo}}{\text{minimo}}$ locale

perché $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^2\cdot\underbrace{\left[\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right]}_{\substack{>0 \text{ permanenza del segno} \\ <0}}$ $\overset{<0}{>0}$ se $x\neq x_0$ in un intorno

situazione 2 3

Se $f''(x_0)=0$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o\left((x-x_0)^3\right)$$
$$=\underbrace{(x-x_0)^3}\cdot\underbrace{\left[\frac{f'''(x_0)}{3!}+o(1)\right]}$$

Se $f'''(x_0)\neq 0$ non ho né max né minimo

Se $f'''(x_0)=0$ potrei avere max o min.

↳ guardo $f^{IV}(x_0)$ ....

Regola: Guardo la prima derivata che non si annulla in x_0

- se è di ordine dispari: x_0 non è né max né min locale.
- se è pari $\begin{cases} >0 : x_0 \text{ punto di minimo locale} \\ <0 : x_0 \text{ punto di massimo locale.} \end{cases}$

Il criterio si può applicare alle serie quando voglio utilizzare il criterio di Leibniz:

$$\sum (-1)^n a_k$$

se $a_k \to 0$, decrescente allora la serie converge.

$\to$ ES

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+4}{n^2+n} \cdot x^n \quad \text{per } x=-1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3n+4}{n^2+n} = \sum (-1)^n \cdot a_n$$

$a_n = \frac{3n+4}{n^2+n}$ $\qquad$ a_n è decrescente?

$$a_n = f\left(\tfrac{1}{n}\right) \quad \text{se} \quad f(x) = \frac{\frac{3}{x}+4}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} \qquad x = \frac{1}{n}$$

Se f è crescente in un intorno di 0^+ allora $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ è decrescente in un intorno di $+\infty$.

Se $f'(x) > 0$ in un intorno destro di $x=0$ allora f è crescente in tale intorno $\Rightarrow$ ok.

$$f(x) = \frac{3x+4x^2}{1+x}$$

$$= (3x+4x^2)\cdot(1+x)^{-1}$$

Uso Taylor come cannone, bastava fare la derivata

$$= \underbrace{(3x+4x^2)\cdot(1-x+o(x))}$$

$$= 3x + o(x)$$

$P(x) = 3x$ è il pol. di Taylor di f

$P'(x) = 3$

$f'(x) = 3 + o(1) > 0$ in un intorno di $x=0$.

$\square$