ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 5 – 30.9.2022

Numeri naturali

Esiste un insieme $\mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{N}$, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

<u>Assiomi di Peano</u>

$\sigma(n) =$ "successore di n"

(i) σ iniettiva $\qquad 1 = \sigma(0)$

(ii) $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\qquad 2 = \sigma(1)$

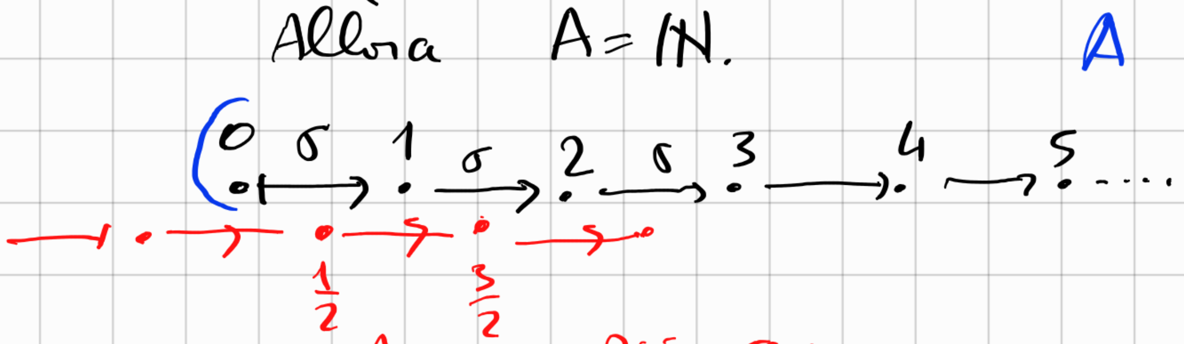
(iii) (induzione) $\qquad 3 = \sigma(2)$

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\qquad 4 = \sigma(3)$

(a) $0 \in A$

(b) $n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A$

Allora $A = \mathbb{N}$.



NON CI PUÒ ESSERE

NON CI PUÒ ESSERE ∞

Principio di induzione

Sia $P(n)$ un predicato definito $\forall n \in \mathbb{N}$. Se

(a) $P(0)$ è verificata

(b) $\forall n : P(n) \Rightarrow P(\sigma(n))$ $\quad (\sigma(n) = n+1)$

ipotesi induttiva

Allora $\forall n : P(n)$ è verificata.

<u>Esempio</u> $P(n)$: $\qquad 2^{n+4} \geq (n+4)^2 \iff \boxed{2^n \geq n^2 \text{ se } n \geq 4}$

(a) $n = 0$ $\qquad \underset{16}{2^{0+4}} \overset{?}{\geq} \underset{16}{(0+4)^2}$ $\qquad$ ok

(b) Supponiamo $P(n)$: $2^{n+4} \overset{!}{\geq} (n+4)^2$

Devo dimostrare $P(n+1)$: $2^{n+5} \overset{?}{\geq} (n+5)^2$

ipotesi induttiva

$$2^{n+5} = 2^{n+4}\cdot 2 \overset{!}{\geq} (n+4)^2 \cdot 2 = \cancel{(n+4)^2} + (n+4)^2$$

$$\overset{?}{\geq}$$

$$(n+5)^2 = ((n+4)+1)^2 = \cancel{(n+4)^2} + \underline{2(n+4)+1}$$

è equivalente

$$(n+4)^2 \overset{?}{\geq} 2(n+4)+1$$

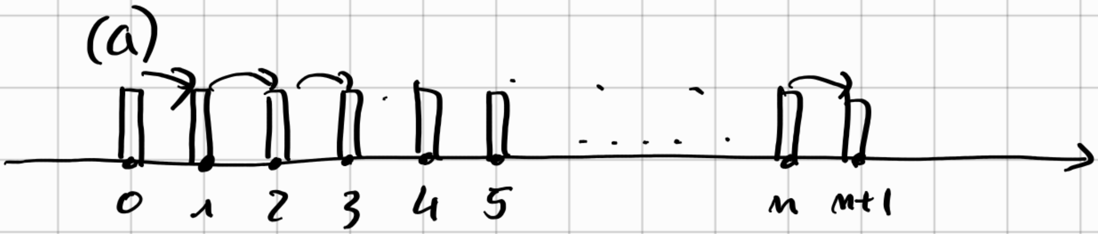
$$[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$$

$$n^2 + 8n + 16 \overset{?}{\geq} 2n + 8 + 1$$

$$8n + 16 \overset{!}{\geq} 2n + 9$$

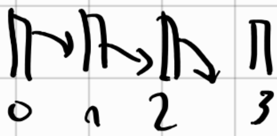
Per il principio di induzione $2^{n+4} \geq (n+4)^2$ è valida $\forall n \in \mathbb{N}$

(a)



Esempio → $\boxed{2^n \overset{?}{\geq} n^2}$ è vero $\forall n$?

n	2^n	n^2	$2^n \geq n^2$
0	1	0	V
1	2	1	V
2	4	4	V
3	8	9	F
4	16	16	V
⋮	⋮	⋮	V
			V



Es per casa: provo a dimostrare $\boxed{2^n \geq n^2}$ per induzione. Dove fallisco la dimostrazione?

Variante I: Se (a) $P(n_0)$
(b) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geq n_0$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$.

Variante II: Se (a) $P(0)$
(b) $[\forall k \leq n : P(k)] \Rightarrow P(n+1)$

Allora $P(n)$ vale $\forall n \geq 0$

* Es. Dimostrare che la variante II si può ricondurre alla variante I.

Definizioni per induzione (o ricorsive).

Es. $n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ fattori}}$

$$(n+1)! = \underline{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

$$\begin{cases} 0! = 1 & \text{(a)} \\ (n+1)! = n! \cdot (n+1) & \text{(b)} \end{cases}$$

Per definire $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ basta dire quanto vale $f(0)$ e definire $f(n+1)$ in funzione di $f(n)$.

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 0! \cdot 1 = 1 \\ 2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \\ 3! = 2! \cdot 3 = (1 \cdot 2)\, 3 = 6 \\ 4! = 3! \cdot 4 = 24 \\ 5! = 4! \cdot 5 = 120 \\ \vdots \end{cases}$$

ES $(n+1)! \geq 2^n$, $n^n \geq n!$

Anche le operazioni elementari: addizione ($+$), moltiplicazione, potenza e la relazione d'ordine $\leq$

$$\begin{cases} n + 0 = n \leftarrow \\ n + \sigma(m) = \sigma(n+m) \end{cases}$$

$$2+2 \overset{?}{=} \sigma(1) + \sigma(1) = \sigma(\sigma(1)+1) = \sigma(\sigma(1)+\sigma(0))$$
$$= \sigma(\sigma(\sigma(1)+0)) = \sigma(\sigma(\sigma(1))) = \sigma(\sigma(2))$$
$$= \sigma(3) = 4. \checkmark$$

$$\begin{cases} n \cdot 0 = 0 \\ n \cdot (m+1) = n \cdot m + n \end{cases}$$

ES: $2 \cdot 2 = 4$.

$$\begin{cases} n^0 = 1 \\ n^{m+1} = n^m \cdot n \end{cases}$$

ES: $2^2 = 4$.

$n \geq m$ per definizione se $\exists k \in \mathbb{N} : n = m + k$

se $n \geq m$ $n - m = k$

Proprietà $+$ e $\cdot$ sono:

commutative: $a+b = b+a$

associative: $(a+b)+c = a+(b+c)$

c'è neutro: $a+0=a$ $a \cdot 1 = a$.

distributiva: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

ordine transitivo: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

ordinamento totale: $a \leq b \vee b \leq a$

monotonia: $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$ $(c \geq 0)$

$a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ $(c \in \mathbb{N})$

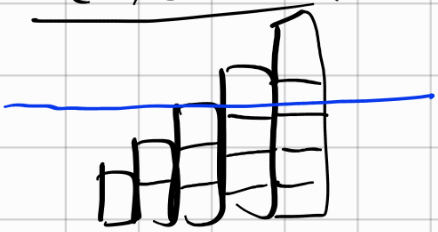
antisimmetrica: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$

Proprietà delle potenze:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \qquad a^1 = a \\ a^{b+c} = a^b \cdot a^c \\ (a^b)^c = a^{b \cdot c} \\ (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c \end{cases}$$

Se $n \cdot m = k$ scriviamo $\frac{k}{m} = n$.

$$\rightarrow 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \leftarrow$$ Per induzione -



$$\begin{array}{r} 1+2+\dots+n \\ +\; n+(n-1)+\dots+1 \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n} = n\cdot(n+1) \end{array}$$

$$1+2+\dots+n = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \left[\sum_{k=1}^{n} f(k)\right] + f(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{0} f(k) = 0. \qquad \sum_{k=1}^{1} f(k) = f(1)$$

Per casa

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{1+4+9+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$