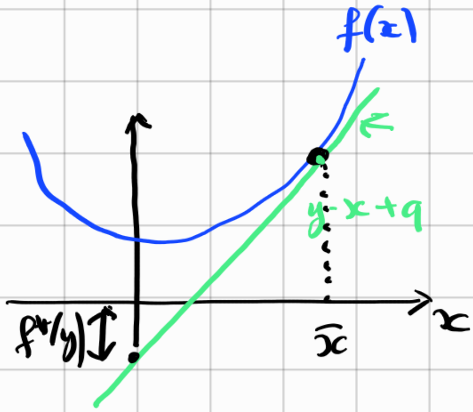
ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 9 - 27.3.2023

$f : H \to (-\infty, +\infty]$ $\qquad$ H Hilbert

DUALITA' di Fenchel - Moreau

$$\boxed{f^*(y) = \sup_{x \in H} \left[y \cdot x - f(x) \right]}$$



$$f^*(y) \geq y \cdot x - f(x)$$

$$f(x) \geq y \cdot x - f^*(y)$$

(1) se $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ cioè $\exists\, \bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) < +\infty$.
allora $f^*(y) > -\infty$ $\forall y$ perché $f^*(y) \geq y \cdot \bar{x} - f(\bar{x}) > -\infty$.

(2) f convessa, s.c.i.
se $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$
$\operatorname{dom} f^* \neq \emptyset$ cioè $\exists\, \bar{y}$ t.c. $f^*(\bar{y}) < +\infty$.
Sappiamo che $\exists\, \bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) < +\infty$.
esiste una funzione lineare affine $x \mapsto \bar{y} \cdot x + q$ t.c.

$$\begin{cases} \bar{y} \cdot x + q \overset{(*)}{\leq} f(x) & \forall x \in H \\ \bar{y} \cdot \bar{x} + q \overset{(**)}{\geq} f(\bar{x}) - 1 \end{cases}$$

sarebbe 0 se siamo in dimensione finita.

$$f^*(\bar{y}) = \sup_x \bar{y} \cdot x - f(x)$$

$$\forall x: \quad \bar{y} \cdot x - f(x) \overset{(*)}{\leq} f(x) - q - f(x) = -q \overset{(**)}{\leq} \bar{y} \cdot \bar{x} - f(\bar{x}) + 1$$

$$\Rightarrow f^*(\bar{y}) \leq \bar{y} \cdot \bar{x} - f(\bar{x}) + 1 < +\infty.$$

③ per ogni f

f^* è convessa e sci $\qquad L_x(y) = y \cdot x - f(x)$

continua.

lineare affine.

$\Downarrow$

convesse, s.c.i.

$$f^*(y) = \sup_x L_x(y)$$

<u>Oss</u> • sup di funzioni convesse è una funzione convessa

•• sup di funzioni s.c.i è s.c.i. $\quad \forall \lambda \in [0,1]$

• $f^*((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \overset{?}{\leq} (1-\lambda) f^*(y_1) + \lambda f^*(y_2)$

9 $\quad f^* = \sup_x L_x \qquad L_x$ convessa

$$(1-\lambda) L_x(y_1) + \lambda L_x(y_2) \leq (1-\lambda) L_x(y_1) + \lambda L_x(y_2)$$

$\Downarrow$

$(1-\lambda) f^*(y_1) + \lambda f^*(y_2) \nearrow \leq (1-\lambda) f^*(y_1) + \lambda f^*(y_2)$

$f^* \geq L_x \quad \forall x$.

(intersezione di insiemi convessi è convesso).

•• $\quad f^* = \sup_x L_x, \qquad L_x$ s.c.i

$y_k \longrightarrow \bar{y} \qquad L_x(\bar{y}) \leq \liminf_k L_x(y_k)$

$\leq \liminf_k f^*(y_k)$

$\forall x \qquad L_x(\bar{y}) \leq$

$\Rightarrow \quad f^*(\bar{y}) \leq$

D.

$$\Gamma = \left\{ f : H \to (-\infty, +\infty] : f \text{ convessa, s.c.i,} \atop \text{dom } f \neq \emptyset \right\}$$

Se $f \in \Gamma \Rightarrow f^* \in \Gamma$. $\quad * : \Gamma \to \Gamma$.

(4) $f^{**} = f$ $\qquad f^{**}(x) = \sup_y x \cdot y - f^*(y)$

(a) $\forall x$: $f^{**}(x) \leq f(x)$.

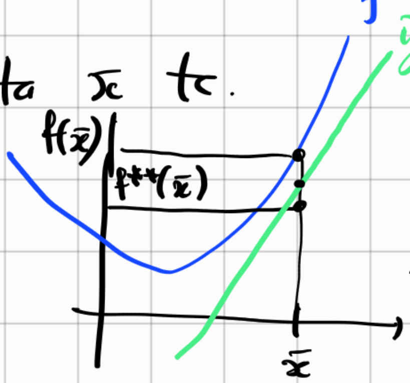
$$\forall x, y \in H : \ (\#) \ xy - f^*(y) \leq \cancel{xy} - \left(\cancel{yx} - f(x)\right) = f(x)$$

$f^* = \sup$

$$f^{**}(x) = \sup_y \# \leq f(x).$$

(b) $f^{**}(x) \geq f(x)$. Per assurdo esista $\bar{x}$ t.c.

$$f^{**}(\bar{x}) < f(\bar{x})$$



$\bar{x} \in \text{dom } f$?

$$\exists \bar{y} : \begin{cases} \bar{y} \cdot x + q \overset{(*)}{\leq} f(x) & \forall x \\ \bar{y} \cdot \bar{x} + q \overset{(**)}{\geq} f^{**}(\bar{x}) + \varepsilon \end{cases}$$

$$f^{**}(\bar{x}) = \sup_y y\bar{x} - f^*(y) \geq \bar{y} \cdot \bar{x} - f^*(\bar{y}) \geq \bar{y}\bar{x} + q \overset{(**)}{\geq} f^{**}(\bar{x}) + \varepsilon$$

(COME SOPRA)

$$f^*(\bar{y}) = \sup_x x\bar{y} - f(x) \overset{(*)}{\leq} \sup_x x\bar{y} - (\bar{y} \cdot x + q) = -q$$

$$f^{**}(\bar{x}) \geq f^{**}(\bar{x}) + \varepsilon \quad \text{assurdo} \ \square$$

TRASFORMATA di LEGENDRE

$$f^*(y) = \sup_x \; y \cdot x - f(x)$$

Se sup = max, f derivabile
nel punto di massimo $\bar{x}$ si annulla la derivata:

$$y - f'(\bar{x}) = 0 \qquad y = f'(\bar{x}).$$

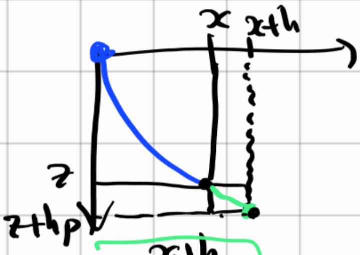
$$f^*(y) = f'(\bar{x}) \cdot \bar{x} - f(\bar{x})$$

Se $\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u')\, dx$, Fissati x, z $f(p) = F(x, z, p)$

la funzione $H(x, z, q) = f^*(q)$
si chiama Hamiltoniana corrispondente alla lagrangiana $\mathcal{F}$.

Si considera la funzione:

$$V(x, z) = \inf \left\{ \int_a^x F(t, u(t), u'(t))\, dt \; : \; \begin{matrix} u(a) = u_a \\ u(x) = z \end{matrix} \right\}$$



u lineare in $[x, x+h]$

Oss
$$V(x+h, z+h \cdot p) \le \boxed{V(x, z)} + \boxed{\int_x^{x+h} F(t, z+(t-x) \cdot p, p)\, dt}$$

$$\frac{V(x+h, z+h \cdot p) - V(x, z)}{h} \le \int_x^{x+h} F(t, z+(t-x) \cdot p, p)\, dt$$

$$\downarrow \text{ per } h \to 0$$

$$F(x, z, p)$$

$$\left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} V(\underline{x+h}, \underline{z+h\cdot p}) \leq F(x,z,p)$$

↑ se questa funzione è derivabile

$$\|$$

$$V_x(x,z) + V_z(x,z)\cdot p$$ ← e se $V(x,z)$ è differenziabile

Lemma $\quad V_x(x,z) + V_z(x,z)\cdot p \leq F(x,z,p) \quad \forall\, x, z, p.$

Teorema Se u è ottimale con dato $u(a)=u_a$, $u(x)=z$

$$V_x(x,u) + V_z(x,u)\, u' \geq F(x,u,u')$$

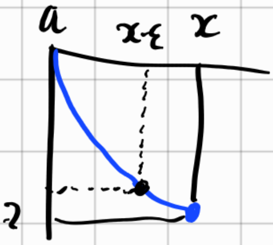
dim

$$V(x,z) = \int_a^x F(t,u(t),u'(t))\,dt = \int_a^{x-\varepsilon} F(t,u,u') + \int_{x-\varepsilon}^{x} F(t,u,u') =$$

u è ottimale su $[a,x]$

$$\geq V(x-\varepsilon, u(x-\varepsilon)) + \int_{x-\varepsilon}^{x} F(t,u,u')$$

↑ (anzi $=$)



$$\frac{V(x,z) - V(x-\varepsilon, u(x-\varepsilon))}{\varepsilon} \geq \int_{x-\varepsilon}^{x} F(t,u(t),u'(t))\,dt$$

$\downarrow \quad \varepsilon \to 0 \qquad\qquad \downarrow$

$$F(x,u(x),u'(x))$$

$$\left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} \frac{V(x+h, u(x+h))}{h}$$ ← se esiste e se V è differenziabile

$$\|$$

$$V_x(x,u(x)) + V_z(x,u(x))\cdot u'(x)$$

$\square$