# I compito, ex 1

domenica 29 maggio 2022 16:03

Studiare la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha > 0 & I) \alpha = 10 \quad \text{o } II) \alpha = -10 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2+a_n} & I) \alpha > 0 \Rightarrow a_n > 0 \ \forall n. \end{cases}$$

$I) \alpha = a_0 > 0$:

$a_n < a_{n+1}$? $\iff a_n < \dfrac{1}{2+a_n} \iff a_n^2 + 2a_n - 1 < 0$

$\iff -\sqrt{2}-1 < a_n < \sqrt{2}-1$

ma $a_n > 0$: allora

$$a_n < a_{n+1} \iff 0 < a_n < \sqrt{2}-1$$

Domanda $a_n < \sqrt{2}-1 \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{2+a_n} < \sqrt{2}-1$ ?

ma $\dfrac{1}{2+a_n} < \sqrt{2}-1 \iff (\sqrt{2}-1) a_n > 3 - 2\sqrt{2} \iff$

$$\iff a_n > \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}-1$$

Quindi $a_{n+1} < \sqrt{2}-1 \iff a_n > \sqrt{2}-1$.

Cioè se $a_0 = \alpha$ $0 < \alpha < \sqrt{2}-1 \Rightarrow a_{2n} < \sqrt{2}-1$, $a_{2n+1} > \sqrt{2}-1$ $\forall n$.

Studiamo allora $b_n = a_{2n}$:

$$b_0 = \alpha > 0 \quad ; \quad b_{n+1} = a_{2n+2} = \frac{1}{2+a_{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2+\dfrac{1}{2+a_{2n}}} = \frac{1}{2+\dfrac{1}{2+b_n}} = \frac{2+b_n}{5+2b_n} > 0 \ \forall n$$

$$b_n < b_{n+1} \iff b_n < \frac{2+b_n}{5+2b_n} \iff 5b_n + 2b_n^2 < 2 + b_n \iff$$

$$\iff b_n^2 + 2b_n - 1 < 0 \iff 0 < b_n < \sqrt{2}-1$$

Dimostriamo che $b_n < \sqrt{2}-1 \Rightarrow b_{n+1} < \sqrt{2}-1$

$$b_{n+1} = \frac{2+b_n}{5+2b_n} < \sqrt{2}-1 \iff (2\sqrt{2}-3) b_n > 7-5\sqrt{2} \iff$$

$$\iff (3-2\sqrt{2}) b_n < 5\sqrt{2}-7 \iff b_n < \frac{5\sqrt{2}-7}{3-2\sqrt{2}} =$$

$$= (5\sqrt{2}-7)(3+2\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$$

Quindi se $a_0 = \alpha < \sqrt{2}-1 \implies$

$$\alpha < b_n = a_{2n} < b_{n+1} = a_{2n+2} < \sqrt{2}-1$$

$\implies b_n$ è crescente $\implies \exists\, l \in \mathbb{R} : b_n \to l$

$$b_{n+1} = \frac{2+b_n}{5+2b_n} \implies l = \frac{2+l}{5+2l} = l = \sqrt{2}-1$$

Quindi $a_{2n} = b_n \to l$ ; $a_{2n+1} = \frac{1}{2+a_{2n}} = \frac{1}{2+b_n} \to \frac{1}{2+\sqrt{2}-1} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

In conclusione $a_n \to \sqrt{2}-1$

analogo se $\alpha > \sqrt{2}-1$, in particolare se $\alpha = 10$.

$\underline{\text{Π}}$ $\alpha = -10 \implies a_1 = \frac{1}{2-10} = -\frac{1}{8}$ $\quad a_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{15}{8}} = \frac{8}{15}$

$\implies$ come già visto $a_2 = \frac{8}{15} > 0 \implies a_n \to \sqrt{2}-1$ //

I compito, ex 2

domenica 29 maggio 2022 17:00

Sia, per $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_2^x \left(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\right) dt = \int_2^x f(t)\,dt$$

a) $F$ è ben definita per $x \in \mathbb{R}$?

b) $F$ è monotona?

c) $F$ ha un asintoto orizz. o obliquo per $x \to +\infty$?

d) $\forall k \in \mathbb{N}$, quanti punti di flesso ha $F$ nell'intervallo $(0, k\pi)$?

a) $f \in C(\mathbb{R})$, anzi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, poiché $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \Rightarrow f(0)=0$. $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow F$ ben definita per $x \in \mathbb{R}$

b) $F'(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ ; per $x \neq 0$ $\frac{\sin^2 x}{x^2} < 1 \Rightarrow F'(x) > 0$ per $x \neq 0$, $F'(0) = 0$

$\Rightarrow F$ strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

c) $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 \Rightarrow F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} \underset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = 1$$

Calcoliamo allora

$$q = \lim_{x\to+\infty}(F(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 2 - \int_2^x \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt - x\right) =$$

$$= -2 - \lim_{x\to+\infty} G(x) \quad \text{dove } G(x) = \int_2^x \frac{\sin^2 t}{t^2}$$

Ma $G$ è crescente e limitata $\Rightarrow \exists \lim_{x\to\infty} G(x) =: \bar{q} \in \mathbb{R}$: in conclusione $F$ ha un asintoto obliquo

d) $F'(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$$F''(x) = -\frac{1}{x^4}\left(2\sin x\cos x \cdot x^2 - 2x\sin^2 x\right) = \frac{-2\sin x}{x^3}(x\cos x - \sin x)$$

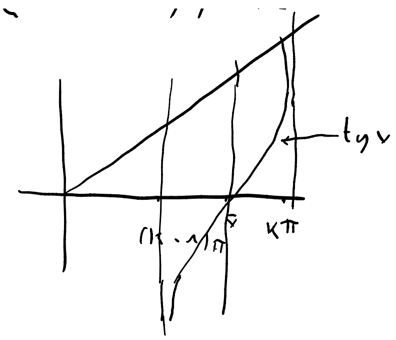
$\Rightarrow F''(x) = 0$, in $\{x > 0\}$, se $\sin x = 0$ o $x = \operatorname{tg} x$.

Ma per $0 < x < \pi$ $\sin x \neq 0$; per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{tg} x > x$

e per $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ $\operatorname{tg} x < 0 < x$.

In conclusione in $(0, \pi)$ $F(x)$ non ha punti di flesso.

In $I_k = [(k-1)\pi, k\pi)$, $k \geq 2$ ?




$\bar{x} = (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} = k\pi - \frac{\pi}{2}$

in $I_k$ $\quad \sin x = 0 \iff x = (k-1)\pi$

$\exists_1 \tilde{x} \quad \tilde{x} = \operatorname{tg} \tilde{x} \quad (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} = k\pi - \frac{\pi}{2} < \tilde{x} < k\pi$

$\Rightarrow$ in $I_k$ ci sono 2 e solo 2 punti $x$ tali che $f''(x) = 0$

e $f''(x)$ cambia di segno in tali punti

$\Rightarrow$ in $I_k$, per $k \geq 1$, $F(x)$ ha 2 punti di flesso $\Rightarrow$

in $(0, k\pi)$, $k \geq 1$, $F$ ha $2k-1$ flessi.

I compito, ex 3

domenica 29 maggio 2022 18:03

Data l'eq. diff.

$$u' = \frac{x}{u}\sqrt{1-u^4} = f(x,u)$$

si considerino i 2 seguenti problemi di Cauchy

1) $u(0) = 1$

2) $u(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Dire, per ognuno di questi problemi, se $\exists$ la soluzione e, se sì, scriverla esplicitamente, stabilendo l'intervallo di esistenza.

1) $u(x) \equiv 1$ è soluzione di 1), ed è unica.

Innanzitutto deve essere $|u| \leq 1$, altrimenti $f$ non è definita.

Sia ora $\bar{x} > 0$ ; se $u(\bar{x}) < 1 \Rightarrow \exists\, x_0 \quad 0 < x_0 < \bar{x}$,

$u'(x_0) < 0$ ; assurdo perché $u'(x) = f(x,u) > 0$ per $x > 0$ e $u > 0$

Analogamente $\nexists\, \bar{x} < 0 \; : u(\bar{x}) < 1$ , perché altrimenti

$\exists\, x_0 \quad \bar{x} < x_0 < 0 \; : \; u'(x_0) > 0$ : assurdo perché

$u'(x) = f(x,u) < 0$ per $x < 0$, $u > 0$.

In conclusione la soluzione di 1) è $u \equiv 1$, definita per $x \in \mathbb{R}$, ed è unica.

2) Ora $-1 < u < 1$

$$u' = \frac{x}{u}\sqrt{1-u^4}$$

$2uu'$ $\quad 1\sim$

$$\frac{2uu'}{\sqrt{1-u^4}} = 2x$$

$$\arcsin(u^2(x)) = x^2 + c$$

$$u(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \arcsin\frac{1}{2} = c \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

$$u(x) = +\sqrt{\sin\left(x^2+\frac{\pi}{6}\right)} \qquad x \in I = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$$

+ perché $u(0)>0$, e $u(x) \neq 0 \ \forall x \Rightarrow u(x)>0$

Agli estremi di $I$ $u(x)=1$, $\Rightarrow$ come visto al punto 1),

la soluzione si estende alla soluzione massimale su $\mathbb{R}$

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin\left(x^2+\frac{\pi}{6}\right)} & x \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right] = J \\ 1 & x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}, +\infty\right) \end{cases}$$

e la soluzione è unica: in $J$ unicità grazie a Cauchy-Lipschitz,

in $\mathbb{R}\setminus J$ con lo stesso ragionamento del punto 1).