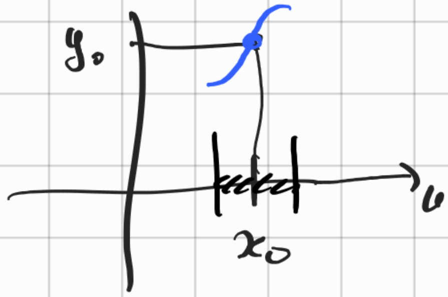
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 75 - 4.4.2022

Teorema di Cauchy-Lipschitz $(\exists!)$

$f \in C^1$



$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$\exists\, \delta > 0$ t.c. in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ $\exists!$ u soluzione.

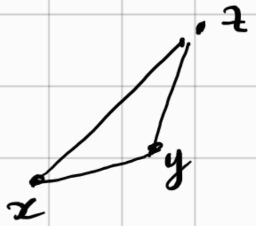
Teorema $\begin{cases} x^2 = 2 \\ x > 0 \end{cases}$ ha soluzione.

Idea $C^0([a,b])$ è uno spazio (vettoriale) i cui punti sono funzioni.

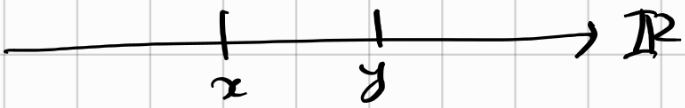
SPAZIO METRICO

def [distanza] X insieme. $d: X \times X \to \mathbb{R}$
si dice essere una distanza se valgono: $\forall x, y, z \in X$

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(ii) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y$
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$
(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$



Es $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$



d è una distanza su $\mathbb{R}$.

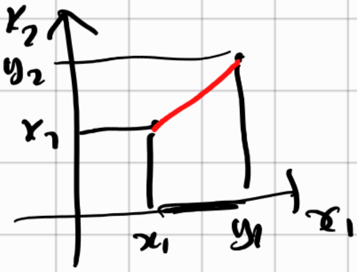
def Si dice che X è uno spazio metrico con distanza d

se d è una distanza su X.

Es $\mathbb{R}^n$ $\quad x \in \mathbb{R}^n \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

(distanza euclidea)

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$$



$$\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{[n]}$$

Oss $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$

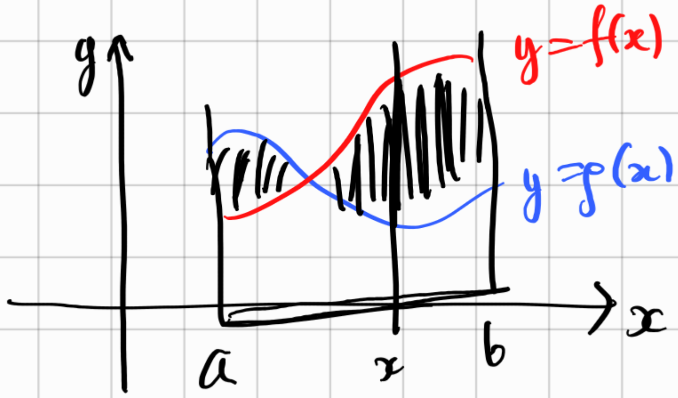
$$\|\underline{v}\| = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$ si dice essere una "norma"

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

X = spazio di funzioni.

$$X = C^0([a,b], \mathbb{R}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}, \ f \text{ continua} \}$$

$d(f,g) = ?$



distanza L^p

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$p=2$ distanza L^2 è euclidea

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p$$

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)\Big]^{\frac{1}{p}}$$

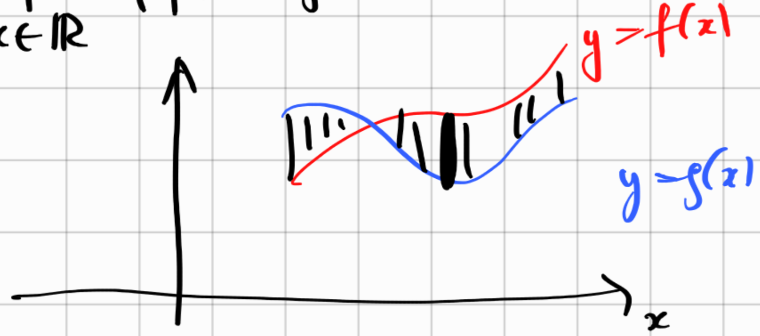
Se $p=2$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

dove $\langle f,g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx$

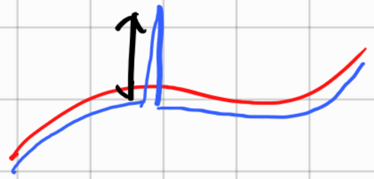
Noi usiamo la distanza <u>uniforme</u> $f,g : A \to \mathbb{R}$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$$



$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$



d_∞ è una distanza?

$X = \mathcal{B}(A, \mathbb{R}) = \{f : A \to \mathbb{R}, \ f \text{ limitata}\}$

$f \in X \iff \|f\|_\infty < +\infty$

(0) $d_\infty(f,g) < +\infty$ $(\in \mathbb{R})$

(1) $d_\infty(f,g) = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} f = g \Longleftrightarrow \forall x: f(x) = g(x)$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| = 0 \Longleftrightarrow \forall_{x \in A} \; |f(x) - g(x)| = 0$$

(2) $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$. $\qquad |f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$

(3) $d_\infty(f,h) \le d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$

$$\forall_x: \quad |f(x) - h(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

$$\sup_x |f(x) - h(x)| \le \sup\left(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\right)$$

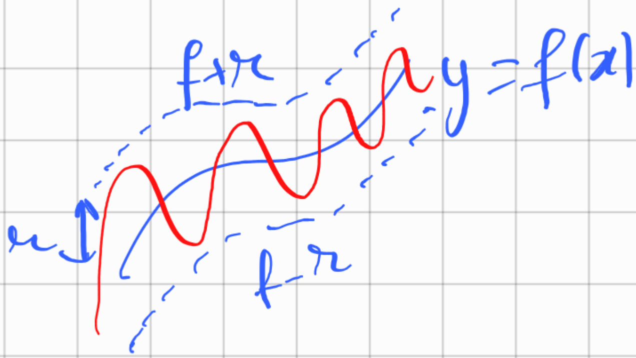
$$\wedge\!\!/\!\!/$$

$$\sup(|f(x) - g(x)|) + \sup(|g(x) - h(x)|)$$

$$d_\infty(f,g) \overset{\shortparallel}{+} d_\infty(g,h).$$

$\sup(A+B) \le \sup A + \sup B$

$d(f,g) \le r$



Limiti e continuità

X, Y sp. metrici

$f: X \to Y$ è continua $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; d_X(x,y) < \delta$

$$\Downarrow$$

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

$$a_n \in X \qquad a_n \to a \in X$$

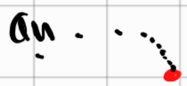
$$\Updownarrow \text{ def}$$

$$d(a_n, a) \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : n > N \quad d(a_n, a) < \varepsilon$$

COMPLETEZZA



X sp. metrico

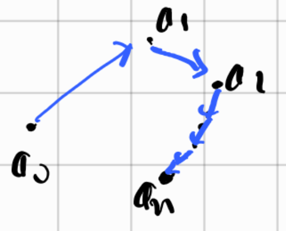
def $a_n \in X$ si dice essere contraente se $\exists\, L < 1$ t.c. $d(a_{n+1}, a_n) \le L^n$

def diremo che X è completo se ogni successione contraente è convergente.

Th. $\mathbb{R}$ è completo.

dim Sia a_n contraente $\Rightarrow \exists L \mid |a_{n+1} - a_n| \le L^n$

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$



$n \to +\infty \downarrow$

$$a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \qquad |a_{k+1} - a_k| \le L^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \quad \text{è assolutamente convergente}$$

$\Rightarrow a_n - a_0$ è convergente $\Rightarrow a_n$ è convergente $\square$

Di solito si introduce il concetto di Successione di Cauchy:

def a_n è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N : \forall k,j \geq N : d(a_k,a_j)<\varepsilon$$

Oss1 se a_n è contraente $\Rightarrow$ è di Cauchy.

Oss2 Se a_n è di Cauchy $\Rightarrow \exists\, n_k$: a_{n_k} è contraente

Oss3 Se a_n è di Cauchy e $a_{n_k} \to a$ allora $a_n \to a$.

ogni a_n contraente è convergente

ovvio $\Uparrow$ $\quad\Updownarrow\quad$ $\Downarrow$?

ogni a_n di Cauchy è convergente

Th $\mathbb{R}^N$ è completo.

dim si fa per componenti

Se $\underline{a_n} \in \mathbb{R}^N$ $\qquad \underline{a_n} = (a_n^1, \dots, a_n^N) \in \mathbb{R}^N$

$$|a_n^k - a_m^k| \leq \|\underline{a_n} - \underline{a_m}\|$$

Se $\underline{a}_n$ è contraente ogni a_n^k lo è

$$a_n^k \to a_k \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a_n} \to \underline{a} = (a_1, \dots, a_N)$$

$$\|\underline{a_n} - \underline{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |a_n^k - a_k|} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \text{se ogni } |a_n^k - a_k| \to 0$$

$\square$

Corollario $\mathbb{C}$ è completo $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

Th Se X, Y sono spazi metrici, Y completo allora

$$C_b(X,Y) = \{ f : X \to Y, \ f \text{ continua}, \ f \text{ limitata} \}$$

(f limitata : $\exists M \ \exists y_0$: $d(f(x), y_0) \leq M$)

(A noi interessa $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$) $\triangleleft$

$C_b(X,Y)$ è completo per la distanza uniforme:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

dim Sia f_k contraente per d_∞ in $C_b(X,Y)$

$\exists L < 1$: $\quad d_\infty(f_{k+1}, f_k) \leq L^k$

$$\sup_{x \in X} d_Y(f_{k+1}(x), f_k(x)) \leq L^k$$

$\forall x \in X$: $\quad d_Y(f_{k+1}(x), f_k(x)) \leq L^k$

$\forall x \in X$: $\quad f_k(x)$ è contraente in Y

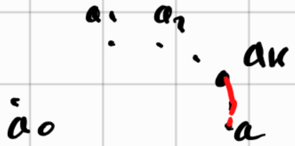
$\forall x \in X : \exists f(x) \in Y$: $\quad f_k(x) \to f(x)$

$$\left[\begin{array}{c} d_Y(f_k(x), f(x)) \to 0 \\ \not\Downarrow \\ d_\infty(f_k, f) \to 0 \end{array} \right]$$

Lemma Se a_k è contraente con un certo $L<1$
e $a_k \to a$

allora $$d(a_n, a) \le \frac{L^n}{1-L}$$

dim



$$d(a_n, a) \le \sum_{k=n}^{+\infty} d(a_{k+1}, a_k) \le \sum_{k=n}^{+\infty} L^k = \frac{L^n}{1-L} \qquad \square$$

$$d(f_k(x), f(x)) \le \frac{L^k}{1-L} \qquad \forall x.$$

$$\sup_x d(f_k(x), f(x)) \le \frac{L^k}{1-L}$$

$$d_\infty(f_k, f) \le \frac{L^k}{1-L} \longrightarrow 0 \quad \text{per } k\to+\infty.$$

f è continua? è limitata?