ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 24 – 15.11.2021

$\sqrt[n]{n!}$ $\qquad n \le n! \le n^n$

$\sqrt[n]{n} \to 1$ $\qquad \sqrt[n]{n^n} = n \to +\infty$

SUCCESSIONI ESTRATTE (o SOTTOSUCCESSIONI)

$a_n \in \mathbb{R}$ $\qquad \underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$

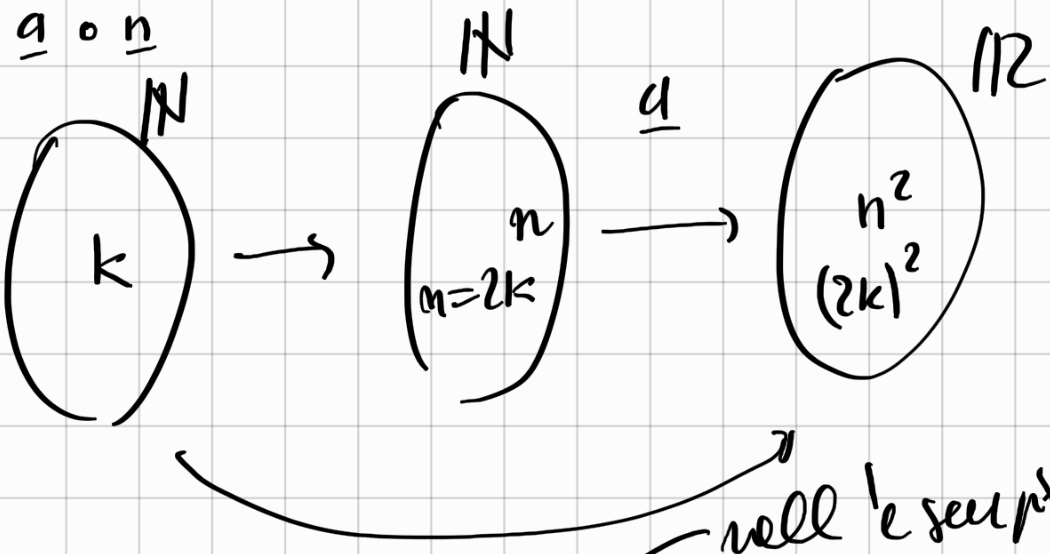
ES $\quad a_n = n^2 \qquad \underline{a} = (\underset{a_0}{0}, \underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{4}, \underset{a_3}{9}, 16, 25, 36) \dots$

$b_k = a_{2k} = (2k)^2 \qquad \underline{b} = (0, 4, 16, 36, \dots)$

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

$n_k = 2k \qquad \underline{n}(k) = 2k$

$\underline{b} = \underline{a} \circ \underline{n}$



nell'esempio

$\underline{b}(\mathbb{N}) = \underline{a}(\underline{n}(\mathbb{N})) = \underline{a}(2 \cdot \mathbb{N})$

Es $a_n = \sqrt{n}$

$n_k = k^2$

$b_k = a_{k^2} = \sqrt{k^2} = k$

$b_0 = a_0 = 0$
$b_1 = a_1 = 1$
$a_2 = \sqrt{2}$
$a_3 = \sqrt{3}$
$b_2 = a_4 = \sqrt{4} = 2$
$\vdots$
$b_3 = a_9 = \sqrt{9} = 3$

Es $a_n = (-1)^n$ $\underline{a} = (1, -1, 1, -1, \dots)$

$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1^n = 1 \longrightarrow 1.$ per $n \to +\infty$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$

a_n non è regolare ma ha estratte regolari.

Es Se una estratta di $a_n = (-1)^n$ ha limite il limite è 1 o -1.

Def Se $n_k = \underline{n}(k)$ $\underline{n} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\underline{n}$ strettamente crescente. Allora $b_k = a_{n_k}$ si dice sottosuccessione di a_n o estratta da a_n.

Oss Se $a_n \to \ell$ e a_{n_k} è una estratta di a_n allora $a_{n_k} \to \ell$.

dim $\quad n_k$ strett crescente a valori in $\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad n_k \to +\infty \quad \text{per} \quad k \to +\infty$$

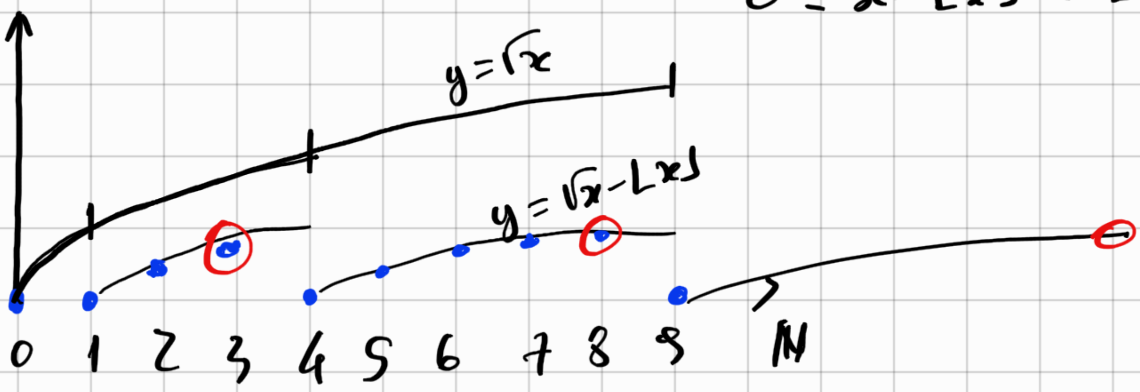
$$\left(\quad n_k \geq k \right)$$

$$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

$n = n_k$

Es $\quad a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$$



Quali sono i numeri che sono limiti di estratte di $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$?

$$L = \{\text{punti limite di } a_n\}$$

$$= \left\{ \lim_{k \to +\infty} a_{n_k} \; : \; a_{n_k} \text{ è una estratta regolare} \right\}$$

$0 \in L \qquad n_k = k^2 \qquad a_{n_k} = \sqrt{n_k} - \lfloor \sqrt{n_k} \rfloor$

$$= \sqrt{k^2} - \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor$$

$$= k - \lfloor k \rfloor = 0$$

$1 \in L$ $\quad n_k = k^2 - 1 \quad k-1 \overset{?}{\leq} \sqrt{k^2-1} < k$

$$a_{n_k} = \sqrt{k^2-1} - \lfloor \sqrt{k^2-1} \rfloor$$
$$= \sqrt{k^2-1} - (k-1)$$

$$(k-1)^2 \leq k^2 - 1$$
$$\cancel{k^2} - 2k + 1 \leq \cancel{k^2} - 1$$
$$2k \geq 2$$
$$k \geq 1$$

$$\lim_{k \to +\infty} \left[\sqrt{k^2-1} - (k-1) \right]$$

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$$

$$\sqrt{k^2-1} - \sqrt{(k-1)^2} = \frac{(k^2-1) - (k-1)^2}{\sqrt{k^2-1} + \sqrt{(k-1)^2}}$$

$$= \frac{\cancel{k^2} - 1 - (\cancel{k^2} - 2k + 1)}{\sqrt{k^2-1} + \sqrt{k^2 - 2k + 1}} = \frac{2\cancel{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)}{\cancel{k}\left[\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}\right]}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$$\longrightarrow \frac{2 \cdot 1}{[1+1]} = 1.$$

$$\sqrt{k^2-1} - (k-1) = k\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} - k + 1$$

$$= k\left(\cancel{1} + o(1)\right) - \cancel{k} + 1$$

$$= k \cdot o(1) + 1$$

⚠

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right) =$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$\frac{1}{2} \overset{?}{\in} L$ se sí chi è n_k t.c. $a_{n_k} \to \frac{1}{2}$?

$\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{?}{\in} L$

$$\boxed{L \overset{?}{=} [0,1]}$$

Teorema (Bolzano-Weierstraß)

a_n è limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$: $\forall n$: $|a_n| \le M$

③ Se a_n è limitata esiste una stretta a_{n_k} convergente.

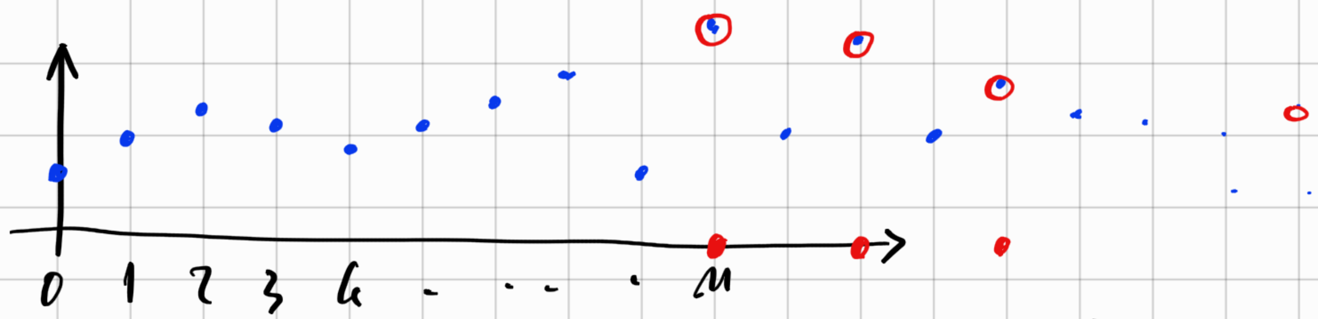
$\Uparrow$

② Se a_n è qualunque esiste una stretta a_{n_k} regolare.

$\Uparrow$

Teorema ① Ogni successione ha una stretta monotóna.

dim



P = "indici di picco" $= \{ n \in \mathbb{N} : \ a_n \ge a_m \ \text{se} \ m \ge n \}$

Se P è infinito $P = \{ n_0, n_1, n_2, \dots \}$

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

n_k è strett. crescente e a_{n_k} è decrescente

perché $a_{n_k} \ge a_{n_{k+1}}$ per definizione di P.

Se P è finito esiste N t.c. $\forall n \geq N$

a_n non è un picco. $n_0 = N$

$a_{n_0} = a_N$ non è un picco $\Rightarrow \exists\, n_1 > n_0 : a_{n_1} > a_{n_0}$

neanche a_{n_1} è picco $\Rightarrow \exists\, n_2 > n_1 : a_{n_2} > a_{n_1}$

. . . . .

$$a_{n_k} \quad \text{t.c.} \quad a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$$

$$\left(n_{k+1} > n_k \right)$$

$\square$

(2) $\Rightarrow$ (3)

a_n è limitata per (2) $\exists\, n_k$

t.c. $a_{n_k} \to \ell \in [-\infty, +\infty]$

$\Rightarrow \exists\, M \in \mathbb{R} \qquad |a_n| \leq M$

$$-M \leq a_n \leq M$$

$$-M \leq a_{n_k} \leq M$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$-M \qquad \ell \qquad M$$

$$-\infty < -M \leq \ell \leq M < +\infty \qquad \square$$

Come dimostro che un limite non esiste.

$\boxed{\lim_n a_n \text{ non esiste}}$ $\Updownarrow$ (*) $\Downarrow$

$\exists\, n_k^{\in \mathbb{N}}, m_k^{\in \mathbb{N}}$ t.c. $a_{n_k} \to \ell_1$, $a_{m_k} \to \ell_2$

n_k strett. crescente $\qquad \ell_1 \neq \ell_2$

m_k strett. crescente.

OVVERO

$\lim_n a_n = \ell \iff \forall\, a_{n_k}$ estratta da a_n

$a_{n_k} \to \ell$.

Sia a_n succ. qualunque. $\boxed{\lim a_n \text{ non esiste}}$

B-W: $\exists\, n_k$ $\boxed{a_{n_k} \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}}$

alternative:

$\swarrow \qquad \searrow$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \qquad \lim a_n$ non esiste

$\Downarrow$

non $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\lim a_n$ non è ℓ

non $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$

$\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N \quad |a_n - \ell| \geq \varepsilon$

a_n sta frequentemente fuori dall'intervallo $I_\varepsilon = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$\exists n_1$ t.c. $a_{n_1} \notin I_\varepsilon$

$\exists n_2 > n_1$ t.c. $a_{n_2} \notin I_\varepsilon$

$\exists n_3 > n_2$ t.c. $a_{n_3} \notin I_\varepsilon$

$a_{n_k} \notin (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$\exists k_j$ t.c. $a_{n_{k_j}} \to \ell_2$

ma $a_{n_{k_j}} \notin (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$\Downarrow$

$\ell_2 \notin (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$\ell_2 \neq \ell$ $\qquad \square$

Sia $L^{\subseteq \overline{\mathbb{R}}}$, l'insieme dei punti limite di a_n

allora B-W: $L \neq \emptyset$

Se $\#L = 1 \iff a_n$ è regolare

$a_n \to \ell$, $L = \{\ell\}$

$\#L \geq 2 \overset{(*)}{\iff} a_n$ indeterminata

⚠ Trovare a_n t.c. $L = \overline{\mathbb{R}}$

⚠ Trovare $L^{\subseteq \overline{\mathbb{R}}}$ t.c. nessuna a_n

(*) ha L come insieme dei punti limite