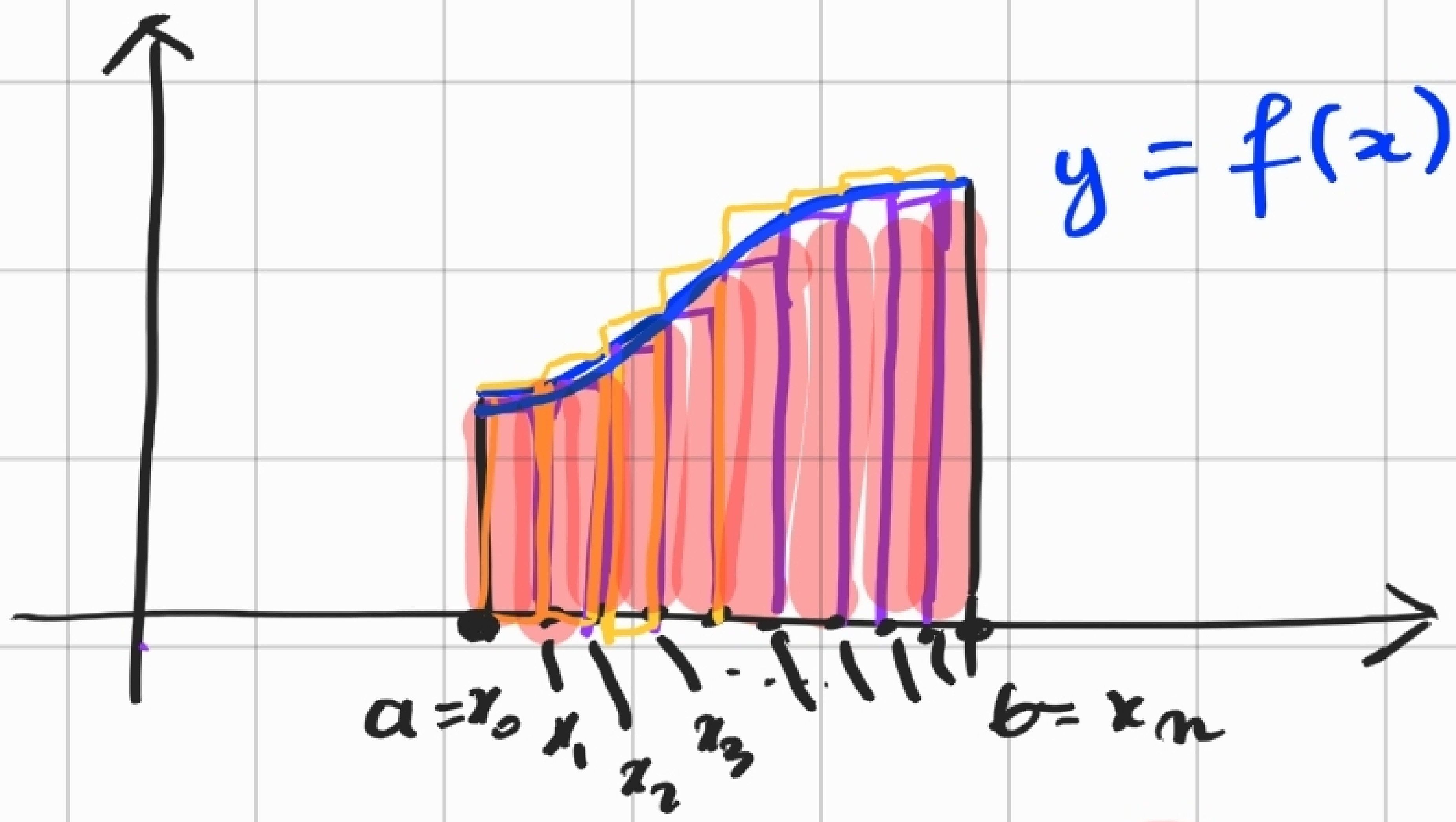
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 57 – 24.2.2021

Integrale di Riemann



$\int_a^b f(x)\,dx$ = "l'area "

Se $f \geq 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = m\left(\{(x,y) : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}\right)$$

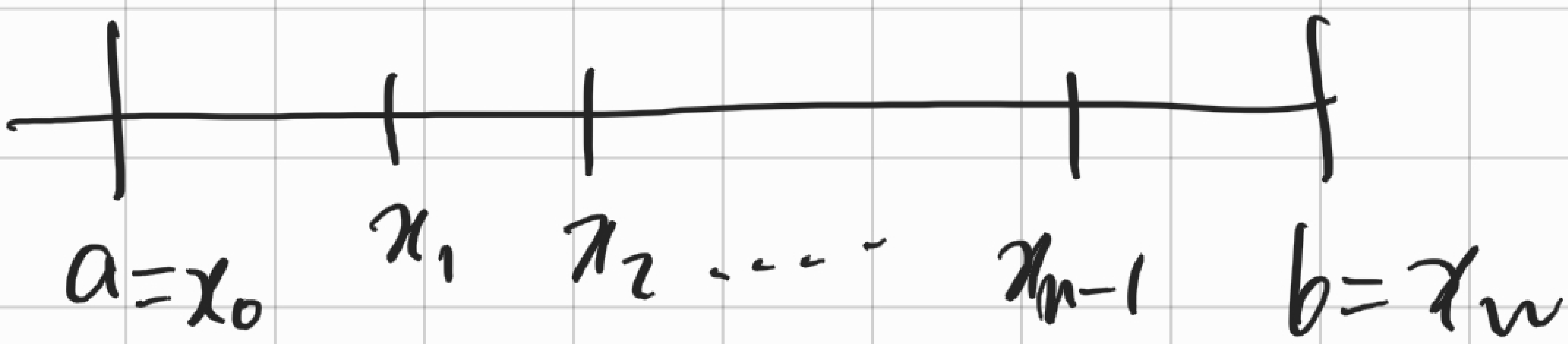
↑ misura di Peano-Jordan.

def (integrale di Riemann)

1. diremo che P è una suddivisione di $[a,b]$ se P è finito, $P \subseteq [a,b]$, $a \in P$, $b \in P$. $\#P = n$

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

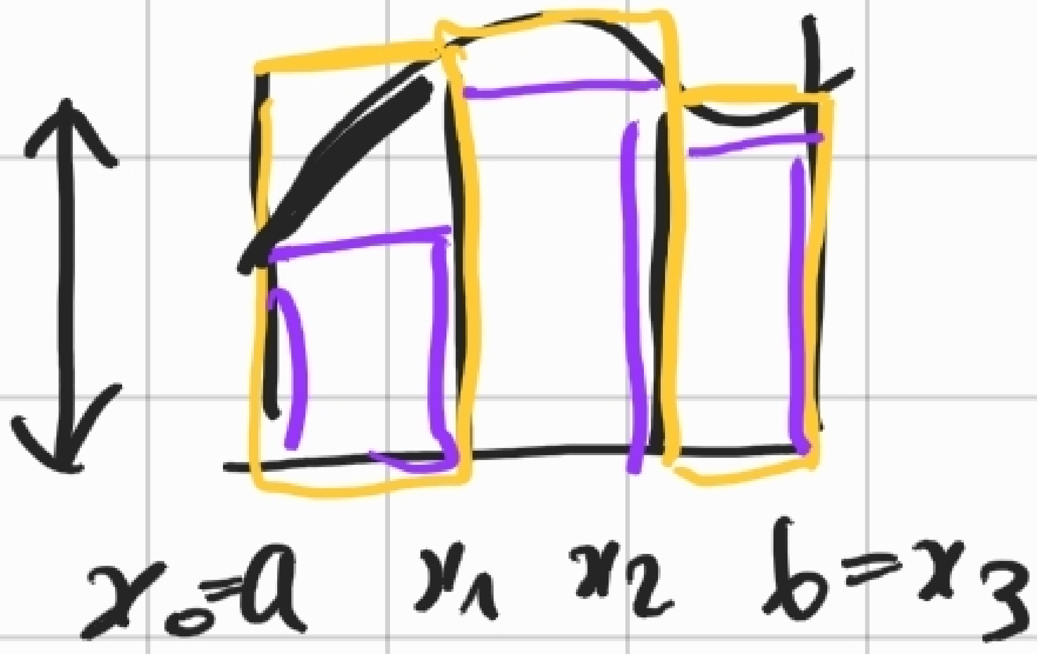
con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$



2. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata.

$$\left(\exists M : \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b] \right)$$

Se P è una suddivisione di $[a,b]$



Somme di Riemann

$$S^*(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f$$

$$S_*(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f$$

$$I^*(f) = \inf_P S^*(f,P)$$

$$= \inf\{S^*(f,P) : P \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

integrale superiore

inferiore

$$\hookrightarrow I_*(f) = \sup_P S_*(f,P)$$

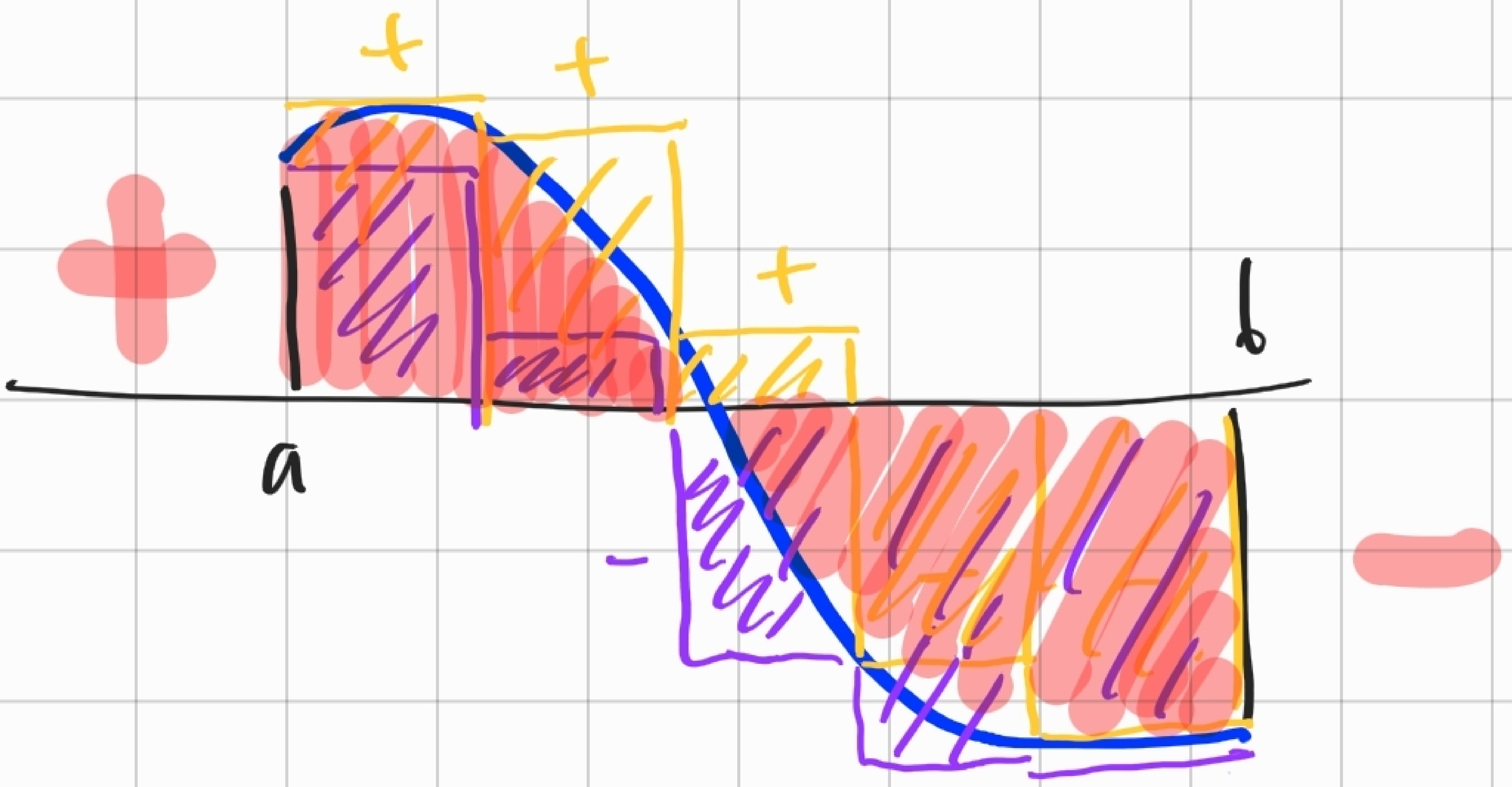
$$= \sup\{S_*(f,P) : P \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

Se $I^*(f) = I_*(f)$ allora diremo che f è Riemann-integrabile su $[a,b]$ e denoteremo con la notazione:

$$\int_a^b f \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

il valore comune $I^*(f) = I_*(f)$

Osservazione: se f non è positiva?

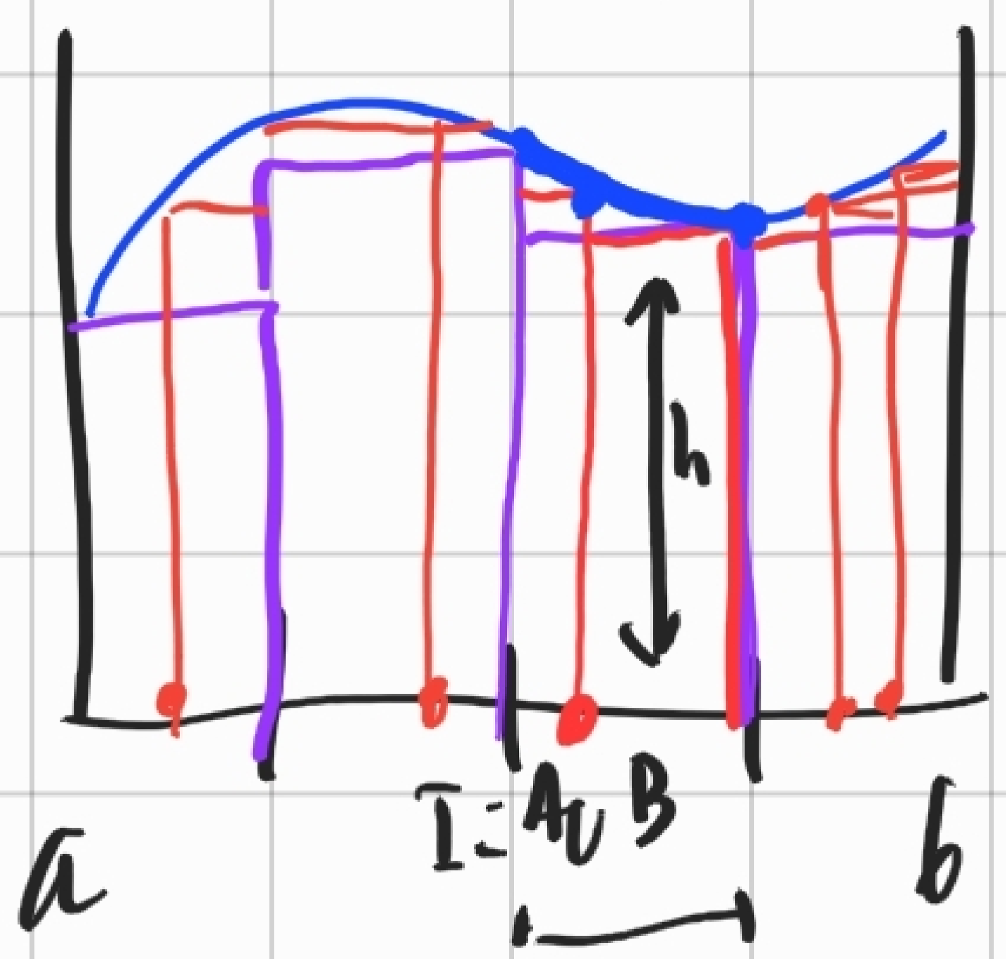


Lemma Se P, Q sono suddivisioni di [a,b].
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, limitata. Allora

$$S_*(f,P) \le S_*(f,P\cup Q) \le S^*(f,P\cup Q) \le S^*(f,Q)$$

ovvio inf ≤ sup

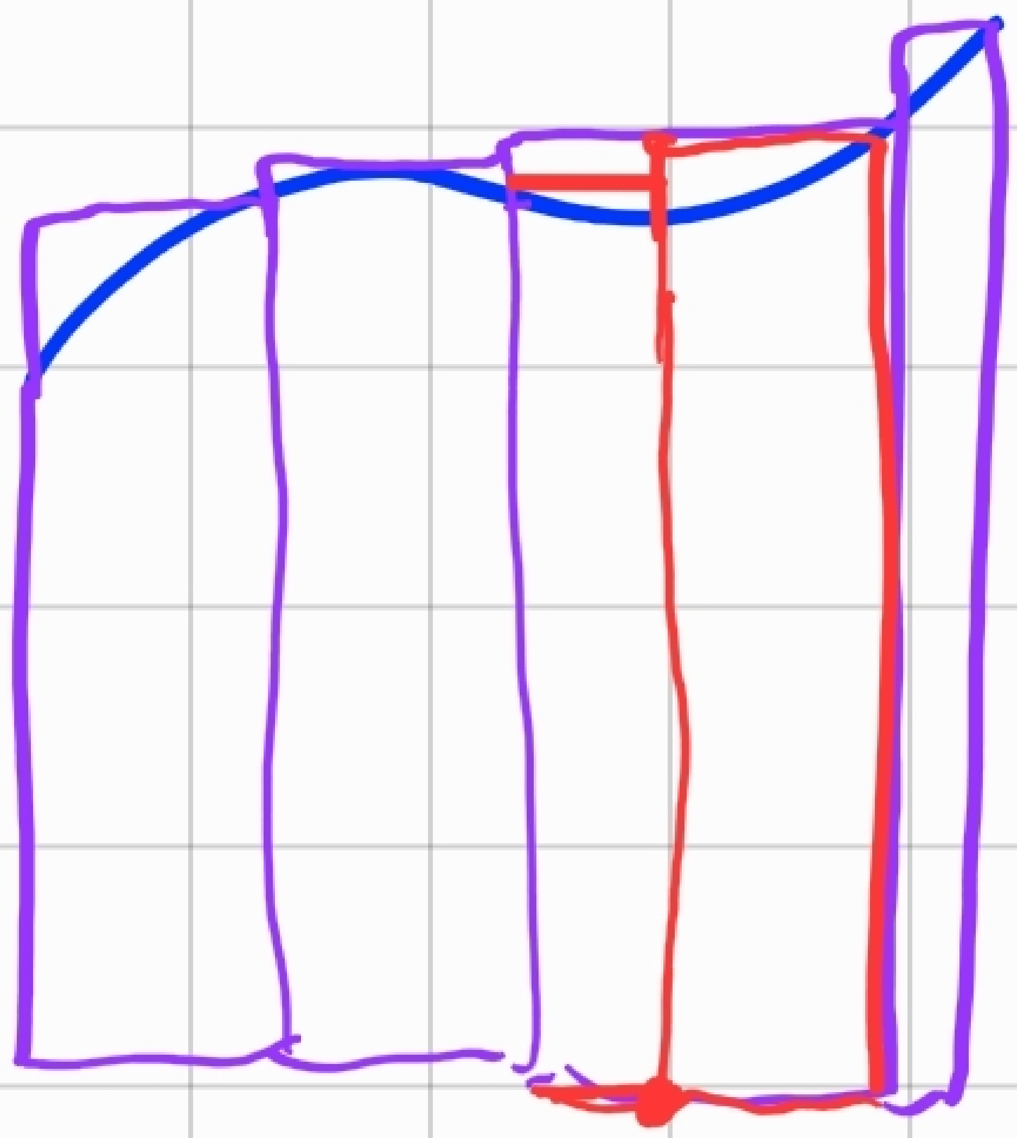
dim $\underbrace{P\cup Q}\supseteq P$

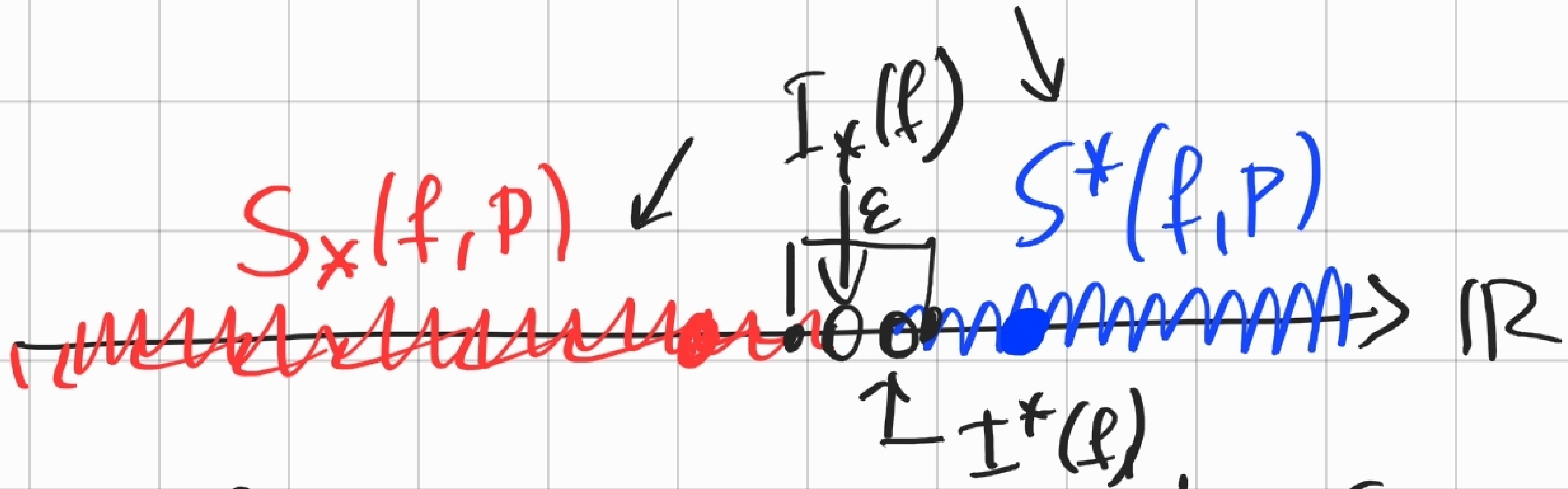


$$h = \inf_I f \le \begin{cases} h_1 \\ h_2 \end{cases}$$

$$h_1 = \inf_A f$$

$$h_2 = \inf_B f$$





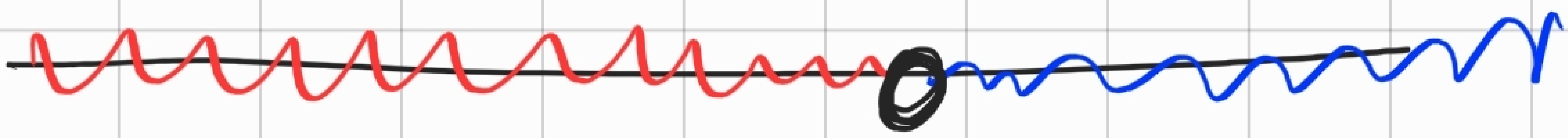
$$\{ S_*(f,P) : P \text{ rozdelenia} \} \le \{ S^*(f,P) : P \text{ rozdelenia} \}$$

$$I_* = \sup_P S_*(f,P)$$

$$I^* = \inf_P S^*(f,P)$$

$$I_*(f) \le I^*(f)$$

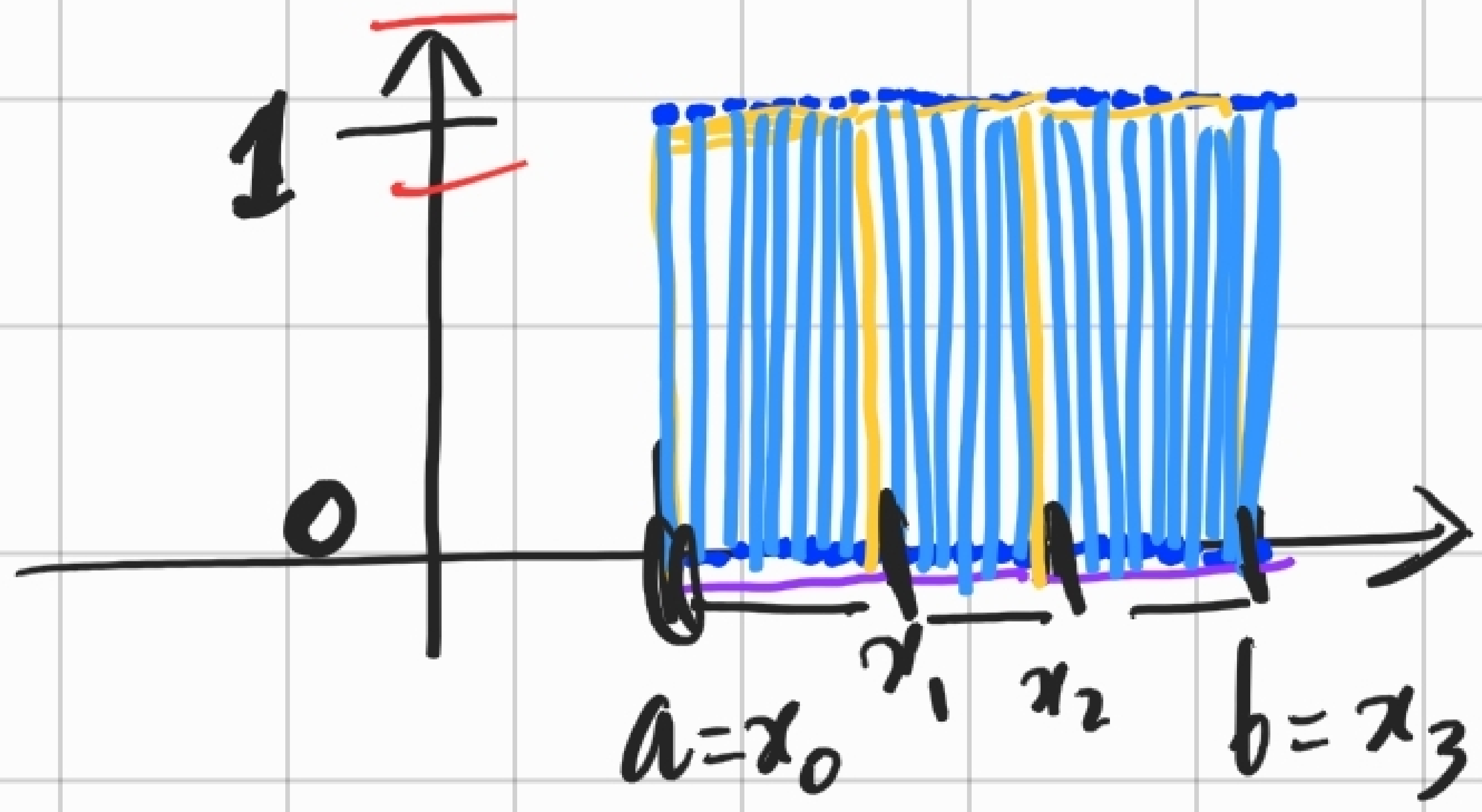
$$I_*(f) = I^*(f)$$



$$\int_a^b f$$

Esempio (funzione non R-integrabile)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



P suddivisione di $[a,b]$

$$S_*(f,P) = 0 \qquad P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$S^*(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot 1 = (\cancel{x_1} - x_0) + (x_2 - \cancel{x_1}) + \dots + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) = x_n - x_0 = b - a.$$

$$I_*(f) = 0$$

$$I^*(f) = b - a$$

f non è R-integrabile su $[a,b]$ se $b > a$.

Teor. (criterio di integrabilità).

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, limitata.

(1.) f è R-integrabile su $[a,b]$

$$\Updownarrow$$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists P$ suddivisione di $[a,b]$ tale che
$$S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon.$$

dim "$\Uparrow$"

se
$$\underset{\Downarrow}{\underset{\geq\quad\quad\leq}{S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon}}$$
$$\boxed{I^*(f)-I_*(f)<\varepsilon}$$

$$S^*(f,P)\geq I^*(f)=\inf_P S^*$$
$$S_*(f,P)\leq I_*(f)=\sup_P S_*$$
$$I^*(f)-I_*(f)\leq S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$$

si vale $\forall\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ $I^*(f)=I_*(f)$

"$\Downarrow$"

se f integrabile

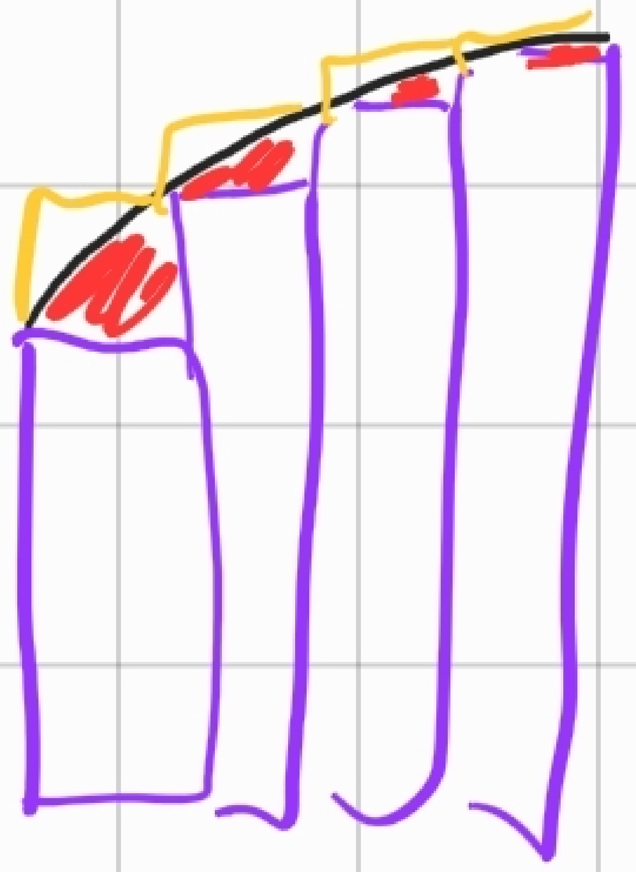
$$\underset{\inf S^*}{\overset{}{I^*(f)}}=\underset{\sup S_*}{I_*(f)}$$

$\forall\varepsilon>0$: $\exists P$: $S^*(f,P)<I^*(f)+\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists Q$: $S_*(f,Q)>I_*(f)-\frac{\varepsilon}{2}$

$$S^*(f,P) - S_*(f,Q) < \varepsilon$$

$$S^*(f,P\cup Q) - S_*(f,P\cup Q) \le S^*(f,P) - S_*(f,Q) < \varepsilon \qquad \square$$



$$S^*(f,P\cup Q) \le S^*(f,P)$$
$$S_*(f,P\cup Q) \ge S_*(f,Q)$$

Esempio Calcolo di un integrale con la definizione.

$$\int_0^b x^2\,dx$$

$a=0$, $[a,b]=[0,b]$, $f(x)=x^2$.

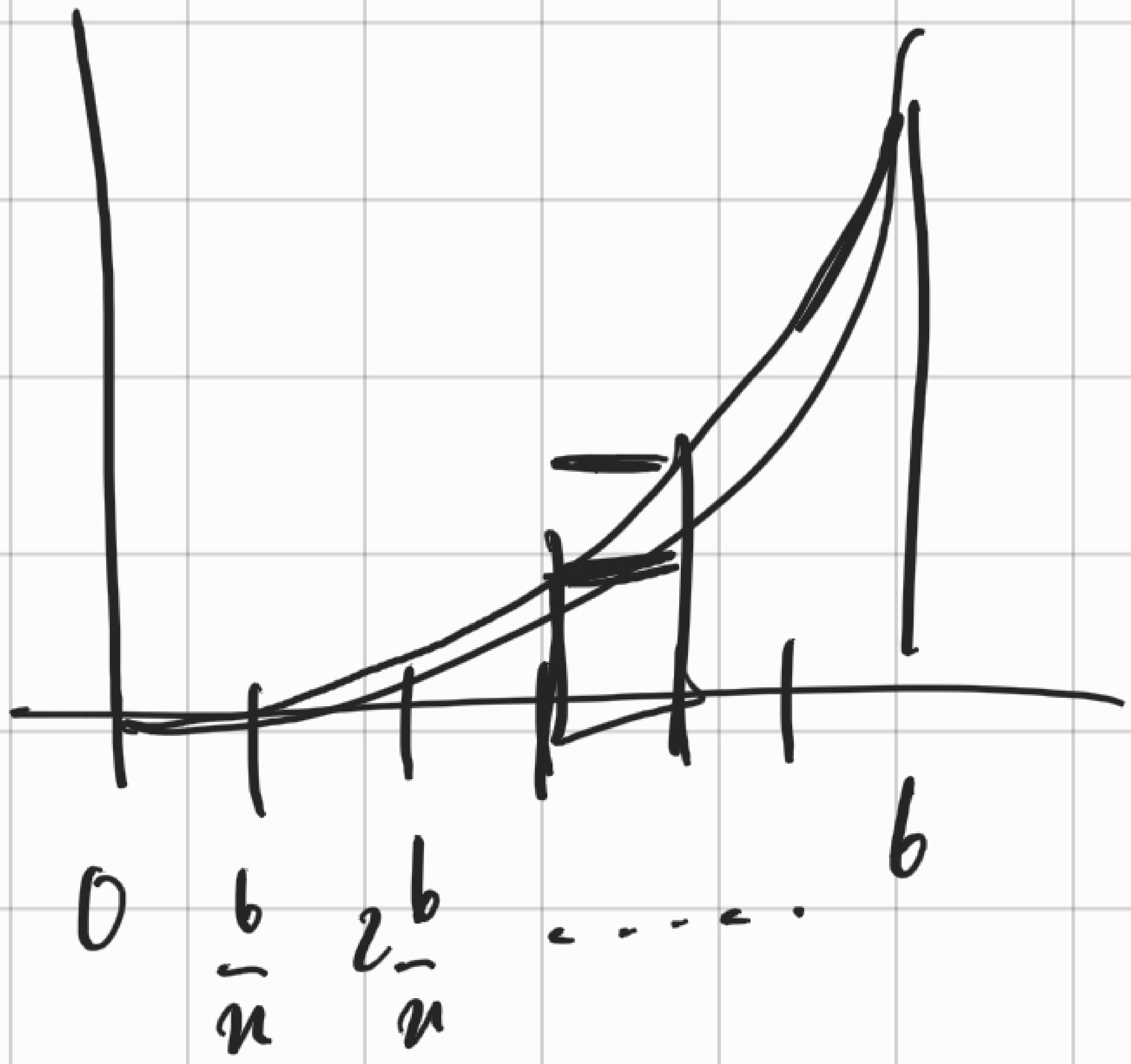
$0 \le f(x) \le b^2$ è limitata su $[a,b]$

$I^*(f) = ?$ $I_*(f) = ?$

$n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, 3\frac{b}{n}, \ldots, (n-1)\frac{b}{n}, b\right\}$$

$$x_k = k \cdot \frac{b}{n}$$



$$S^*(f, P_n) = ? \qquad S_*(f, P_n) = ?$$

$$\sup_{[x_k, x_{k+1}]} f = f(x_{k+1}) = x_{k+1}^2 = \left((k+1)\frac{b}{n}\right)^2$$

$$\inf_{[x_k, x_{k+1}]} f = f(x_k) = x_k^2 = \left(k \cdot \frac{b}{n}\right)^2$$

$$S^*(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{n} \cdot (k+1)^2 \frac{b^2}{n^2}$$

$$S_*(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{n} \cdot k^2 \frac{b^2}{n^2}$$

$$S^*(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$$

$$S_*(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + n-1}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$S^*(f, P_n) = b^3 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{3} b^3$$

$$S_*(f, P_n) = b^3 \frac{2(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + (n-1)}{6n^3}$$

$$\Downarrow$$

$$= b^3 \frac{2n^3 + o(n^3)}{6n^3} \longrightarrow \frac{b^3}{3}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n > N$

$$S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \varepsilon.$$

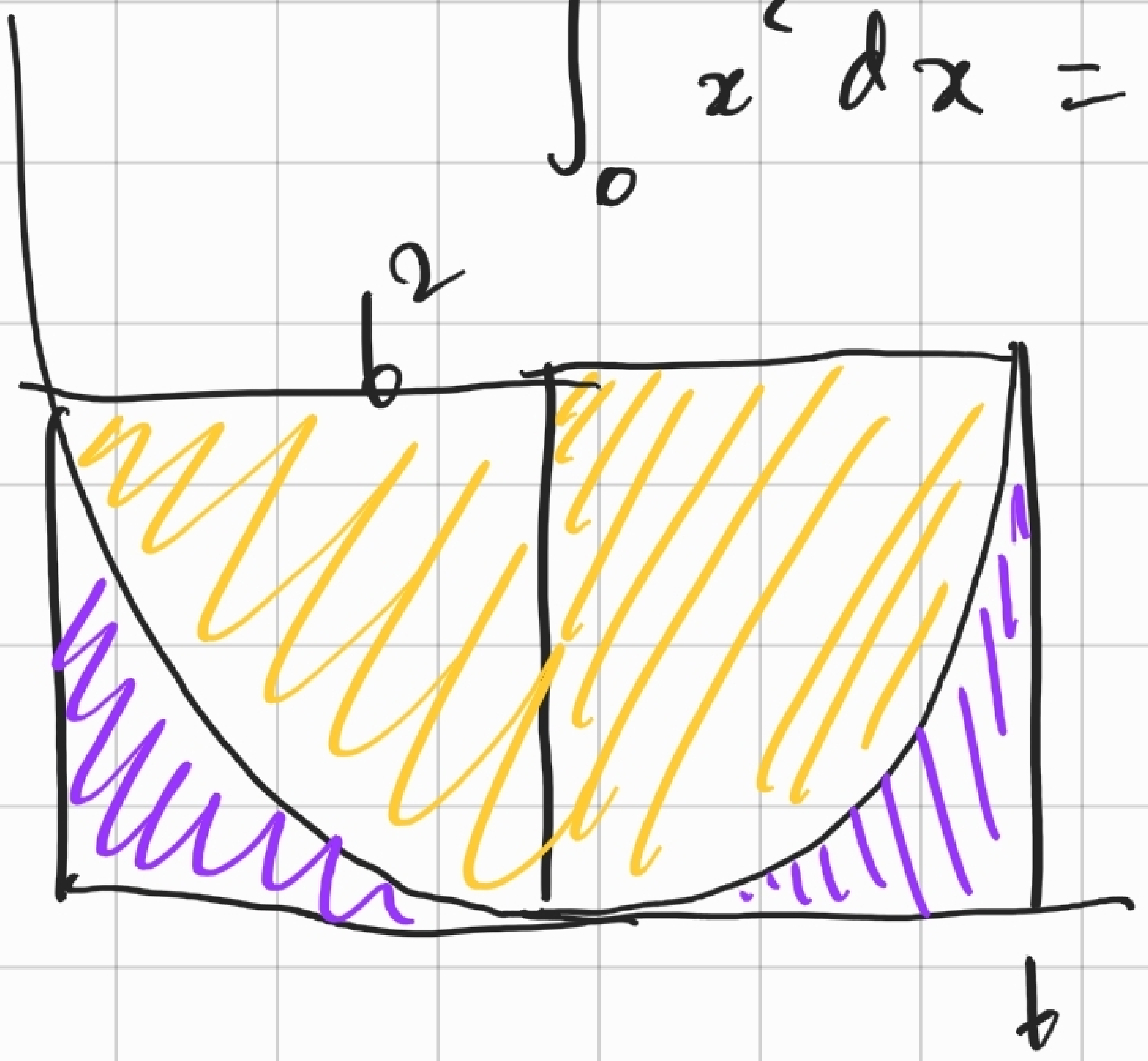
$$S_*(f,P_n) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S^*(f,P_n)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{b^3}{3} \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{b^3}{3}$$

$$I_*(f) = I^*(f) = \frac{b^3}{3}$$

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} \qquad \square$$



Criterio

2. Se f è R-integrabile su $[a,b]$ esiste una successione P_n di suddivisioni di $[a,b]$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} S^*(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} S_*(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Viceversa se f è limitata ed esiste P_n successione di suddivisioni di $[a,b]$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) = 0$$

allora f è R-integrabile. $\square$

$$S_*(f,P) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S^*(f,P)$$

Proprietà degli integrali

MONOTONIA: Se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

f, g limitate, R-integrabili su $[a,b]$

allora $$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

dim

$$f(x) \le g(x)$$

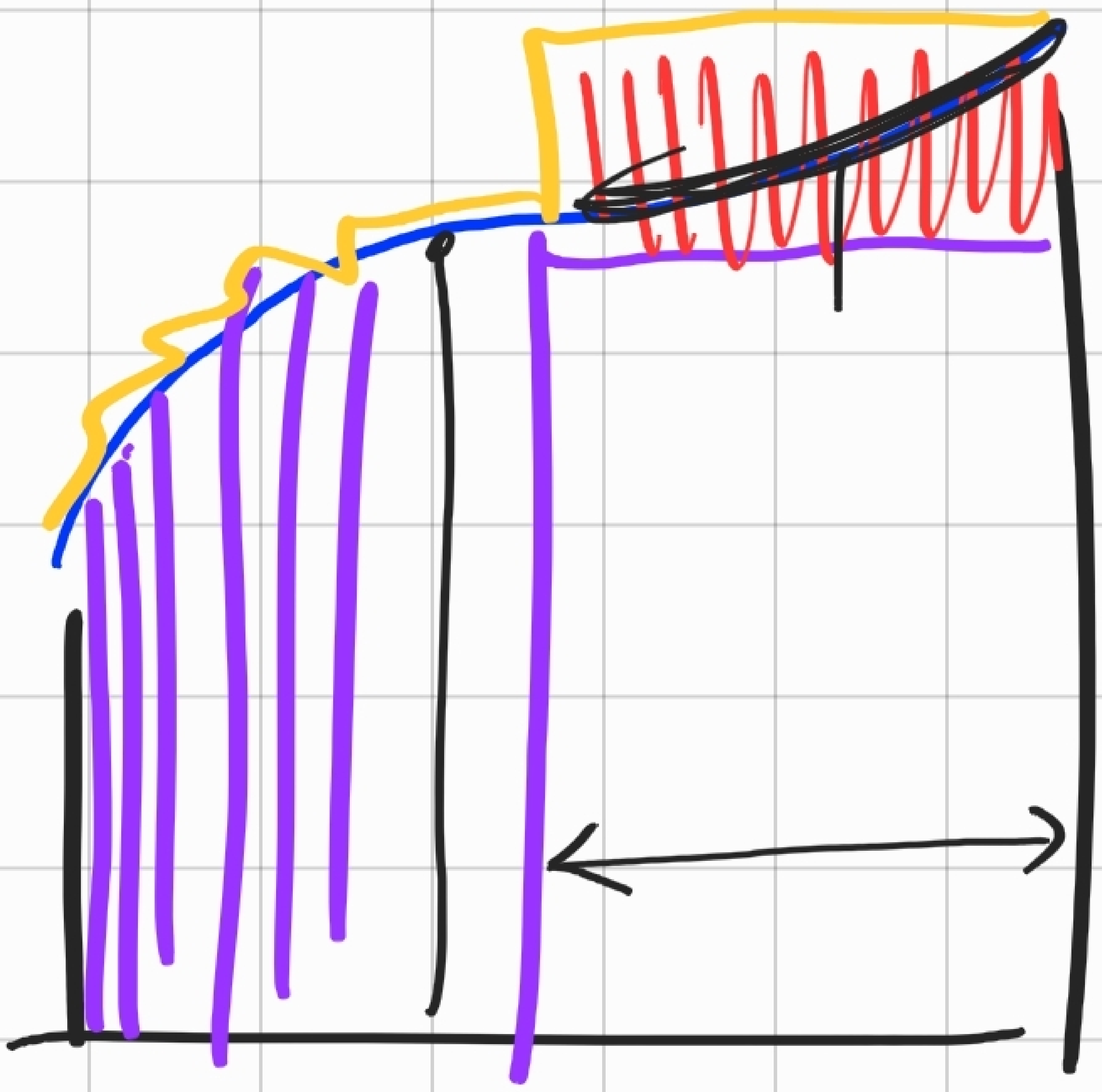
$$\sup_I f \le \sup_I g$$

$$\inf_I f \le \inf_I g$$

$$S^*(f,P) \le S^*(g,P) \Rightarrow I^*(f) \le I^*(g)$$

$$S_*(f,P) \le S_*(g,P) \Rightarrow I_*(f) \le I_*(g)$$

se f, g sono R-integrabili $\int_a^b f \le \int_a^b g$ □



$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} S^*(f, P_n)$$

NO

con $\# P_n = n$

finezza di P $= |P| = \max_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} S^*(f, P)$$

Se $|P_n| \to 0$ $\quad P_n = \{x_0^n, x_1^n, \dots, x_{N_n}^n\}$

$$y_k^n \in [x_k^n, x_{k+1}^n]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum (x_{k+1}^n - x_k^n) \cdot f(y_k^n)$$

$$\text{se} \quad |P_n| \to 0$$

$$|P_n| = \max_{k=0}^{n-1} |x_{k+1}^n - x_k^n|$$