ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 27 - 25.11.2020

Es $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\cancelto{0}{\dfrac{1}{n}}}{\dfrac{1}{n}} \neq \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-0}{\dfrac{1}{n}}$

No!

$$\frac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{\cancelto{0}{\dfrac{1}{n}}-1}{1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{0-1}{1} = -1$$

$$\frac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} \sim \frac{-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = -1 \to -1$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ $\qquad$ $f(x)\to l$ per $x\to x_0$

$$\frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\cancel{0}}{\frac{1}{n}} = \frac{x^2 - x}{x} \longrightarrow -1$$

$n \in \mathbb{N}$
$n \to +\infty$

$x \to 0^+$

$x = \frac{1}{n}$

se questo esiste

$\frac{1}{x} \to +\infty$

$\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} n - \lfloor n \rfloor = \lim_{n \to +\infty} 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{R}}} x - \lfloor x \rfloor \text{ non esiste}$$

Attenzione!

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$t = x^2$ se $x \to 0$

$t \to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

SERIE NUMERICHE

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$

$\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n} + \ldots\ldots$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

se $\sum a_k$ è convergente
allora $a_k \to 0$

SERIE a TERMINI POSITIVI

Se $a_n \geq 0$ $\forall n$.

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ esiste $\in [0, +\infty]$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Se $0 \leq a_k \leq b_k$ se $\sum b_k$ converge

allora $\sum a_k$ converge.

Inoltre $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$

<u>dim</u> $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$R_n \leq S_n \longrightarrow S$$

$\downarrow$ (R_n è crescente)

$$R \qquad \Rightarrow R \leq S.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty$$

$\square$

Attenzione

$$a_k = (-1)^k - 1 = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ -2 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$a_k \leq \frac{1}{2^k} \qquad \sum \frac{1}{2^k} \text{ converge}$$

ma $\sum a_k$ è indeterminata

(certamente $\sum a_k$ non converge perché non $a_k \to 0$)

Analogo risultato se

$$a_k << b_k$$

(Se $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $\sum b_k$ convergente)

Allora $\sum a_k$ è convergente.

<u>dim</u> $a_k << b_k$

$$\frac{a_k}{b_k} \to 0 \Rightarrow \text{definitivamente } a_k \leq b_k$$

il carattere di $\sum a_k$ non

cambia se modifico un

numero finito di termini

$\tilde{a}_k \leq b_k \quad \forall k$

$\tilde{a}_k = a_k$ definitivamente

$\sum \tilde{a}_k$ converge

$\Rightarrow \sum a_k$ converge $\square$.

<u>Esempio</u> $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ converge

perché $\displaystyle\frac{1}{k!} << \frac{1}{2^k}$ $\displaystyle\sum \frac{1}{2^k}$ converge.

Esempio $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k + k^2 \ln k}$ converge

perché $\dfrac{1}{2^k + k^2 \ln k} \leq \dfrac{1}{2^k}$ $\quad \sum \dfrac{1}{2^k}$ converge

Ancora:

$$a_k \sim b_k \qquad \left(\frac{a_k}{b_k} \to 1 \right)$$

$a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$

allora $\sum a_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere.

dim

$$\frac{a_k}{b_k} \to 1 \qquad a_k \leq 2 b_k \text{ def.}$$

se $\sum b_k$ converge

$\Rightarrow \sum 2 b_k$ converge

$\Rightarrow \sum a_k$ converge $\square$

Esempio $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k - k^2 \ln k}$ converge

$$\frac{1}{2^k - k^2 \ln k} \sim \frac{1}{2^k} \quad e \ \sum \frac{1}{2^k} \text{ converge.}$$

$$\boxed{\sum \frac{1}{k^2} \quad ??}$$

$$\frac{1}{k^2} \gg q^k \qquad q<1$$

$$\sum k^2 = ?? \qquad \sum (k+1)^3 - k^3$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)} = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + \cancel{\ldots} + (a_{n+1} - \cancel{a_n})$$

$$= a_{n+1} - a_0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\longrightarrow 1$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1$$

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k^2+k}=\frac{1}{k^2+k}\sim\frac{1}{k^2}$$

$\sum \frac{1}{k^2+k}$ converge

(Serie di Mengoli)

anche $\sum \frac{1}{k^2}$ converge!

Se $p \geq 2$ $\quad \sum \boxed{\frac{1}{k^p}}$ converge!

in questo $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$ —

Es $\sum \frac{1}{k^2 \ln k - \sqrt{1+k}}$

è convergente perché

per 🏠

$$\boxed{k^2 \ln k - \sqrt{1+k} >> k^2}$$

e $\sum \frac{1}{k^2}$ è convergente —

Se $a_k \geq 0$ e non $a_k \to 0$

allora $\sum a_k = +\infty$

Esercizio (*) Se $\sum a_k$ è convergente

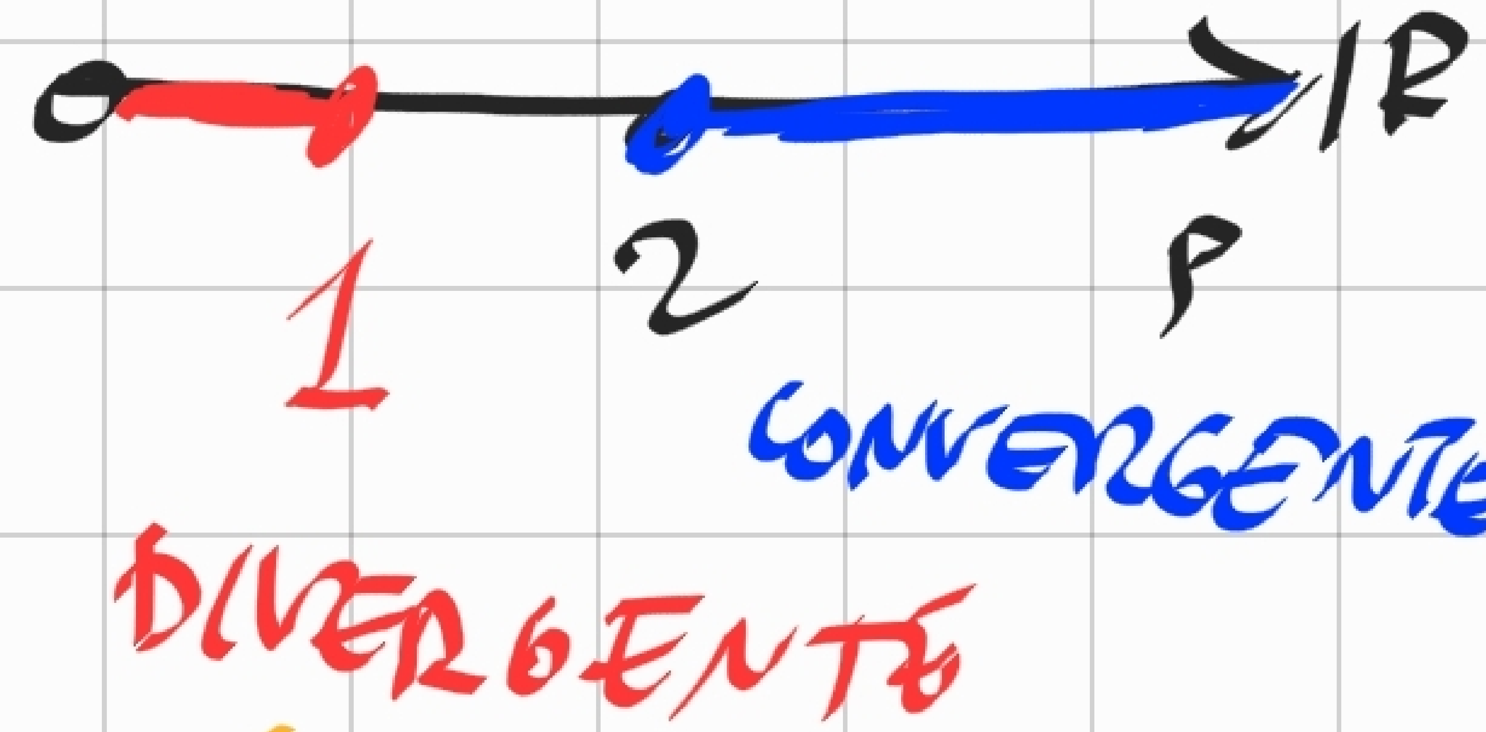
🏠 esiste $b_k >> a_k$ con $\sum b_k$ convergente

Esiste $a_k \to 0$, $a_k \geq 0$, $\sum a_k = +\infty$?

LA SERIE ARMONICA

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$$



a_1 a_2 a_{16}

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}+\dots \geq$$

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4}+\underbrace{\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}}_{8}+\frac{1}{32}+\dots$$

$$1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots=+\infty$$

Teorema (criterio di condensazione di Cauchy)

$a_k \geq 0$, a_k decrescente allora

$\sum a_k$ ha lo stesso carattere di

$\sum 2^k \cdot a_{2^k}$

Es $a_k = \frac{1}{k}$ $\qquad 2^k a_{2^k} = \frac{2^k}{2^k} = 1$

dim a_k decrescente

$$2^n \leq k \leq 2^{n+1}$$

$$a_{2^n} \geq a_k \geq a_{2^{n+1}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_{2^N-1} = \sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} 2^n \cdot a_{2^{n+1}} \le S_{2^N-1} \le \sum_{n=0}^{N-1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

$$2^{n+1}-1-2^n+1 = 2^{n+1}-2^n = 2^n$$

Se $\sum 2^n a_{2^n}$ è convergente

allora $\sum_{k=0}^{N-1} 2^n a_{2^n} \to S' < +\infty$

$S_{2^N} \le S'$

$S_n \to S \Rightarrow S \le S' < +\infty$

S_n crescente

Se $\sum 2^n a_{2^n}$ è divergente

$\sum 2^{n+1} a_{2^{n+1}}$ è divergente

$\sum 2^n a_{2^{n+1}}$ è divergente

$$S_{2^N-1} \geq \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^{n+1}} \longrightarrow +\infty$$

se $N \to +\infty$

$$S_{2^N-1} \to +\infty$$

$$S_n \to S \implies S \geq +\infty$$

$\square$

<u>Corollario</u>

$p \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \text{ converge} \iff p > 1.$$

$\sum \frac{1}{k^p}$ ha lo stesso carattere di $\sum 2^k \frac{1}{(2^k)^p}$

$$\frac{2^k}{2^{kp}} = \frac{1}{2^{kp-k}} = \frac{1}{2^{k(p-1)}}$$

$$= \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = q^k$$

$$q = \frac{1}{2^{p-1}}$$

— si $p > 1$ $\quad p-1 > 0$

$2^{p-1} > 1 \quad \underline{\underline{q < 1.}}$

la série $\sum q^k$ converge

— si $p \leq 1$ $\quad q = \frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$

$\sum q^k$ diverge.

Esercizio 🏠 determinare il carattere

della serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k}$.

$$k^1 \ll k \ln k << k^p \quad \forall p>1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_7 + a_8 + \dots + a_{15}$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + \dots + a_5$$

$$S_{2^3-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_7$$

$$(1+x)^\alpha \cong \underbrace{1+\alpha x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$$

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \Leftarrow x \geq -1$$