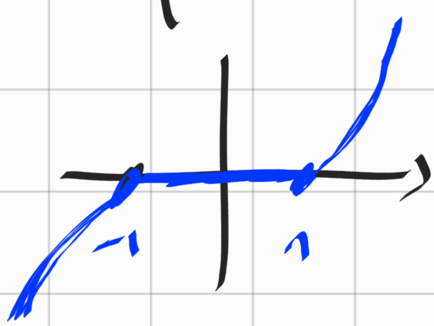
$$f(x) = x \cdot \max\{0, x^2-1\}$$

$$x^2-1 = (x+1)(x-1) > 0$$

se $x>1$ o $x<-1$

		-1		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

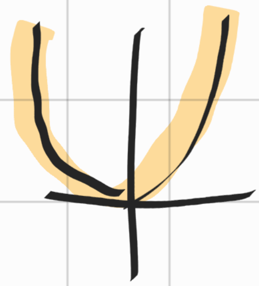
$$f(x) = \begin{cases} \text{se } x>1 \text{ o } x<-1 & f(x) = x\cdot(x^2-1) \\ \text{altrimenti} & f(x) = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \left(1 - \underbrace{\sqrt{\sqrt{x} + (x^2+1)^4}}_{<0}\right)^4 = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f : \underline{\underline{[0, +\infty)}} \to \mathbb{R}$$

x^2



ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 17 — 2.11.2020

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Continuità nel punto x_0:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in A}$$

"Composizione di funzioni continue è continua".

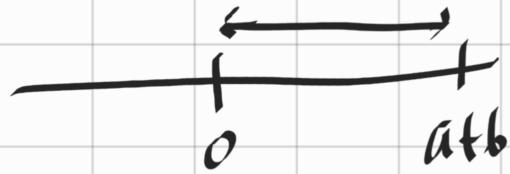
f, g continue $\qquad g \circ f$ è continua

$f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f-g$ sono continue nel punto x_0 se f e g lo sono (nello stesso punto) dimostriamo che $f\cdot g$ è continua in x_0

$$|f(x)g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \le$$

($|a+b| \le |a| + |b|$ dis. triangolare



)

$$\le |(f(x) - f(x_0))\, g(x)| + |f(x_0)\, (g(x) - g(x_0))| \le$$

[f, g continue in x_0

esistono $\exists \delta_1 > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ se $|x - x_0| < \delta_1$

$\exists \delta_2 > 0$ $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ se $|x - x_0| < \delta_2$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se $|x - x_0| < \delta$]

$$< |\varepsilon \cdot g(x)| + |f(x_0) \cdot \varepsilon| =$$

[$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$]

$$= \varepsilon \cdot |g(x)| + |f(x_0)| \cdot \varepsilon$$

$$= \varepsilon \cdot \left[\, |g(x)| + |f(x_0)| \,\right] \le$$

$$\left[\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - g(x_0) + g(x_0)| \\ &\le |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \\ &\le \varepsilon + |g(x_0)| \end{aligned}\right]$$

$$\le \varepsilon \cdot \left[\, \varepsilon + |\,(x_0)| + |f(x_0)| \,\right] \le$$

1000 10000

basta $\varepsilon < 1$

$$\le \varepsilon \left[\, 1 + |g(x_0)| + |f(x_0)| \,\right] \le \varepsilon'$$

se $\varepsilon \le \dfrac{\varepsilon'}{1 + |g(x_0)| + |f(x_0)|}$ $\square$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \varepsilon > 0$

$\exists \delta_1, \delta_2$ dalla continuità di f e g

$\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| < \varepsilon'$

$\underline{f \cdot g}$ $\quad$ $\underline{f+g}$ è più facile da dimostrare

$$|(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))|$$

$$\leq |f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < \varepsilon'$$

$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$

$\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$

se $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$ $\square$

$h(x) = -x$ è continua

(da verificare)

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$$

$$= f(x) + h \circ g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = f(x) \cdot r(g(x))$$

$r(x) = \frac{1}{x}$ è continua

$\square$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Mattoncini (le funzioni elementari)

$$\boxed{\underbrace{\exp_a(x)}_{= a^x},\ \log_a(x),\ x^\alpha,\ \sqrt[n]{x}},\ x^n$$

sono tutte funzioni elementari.

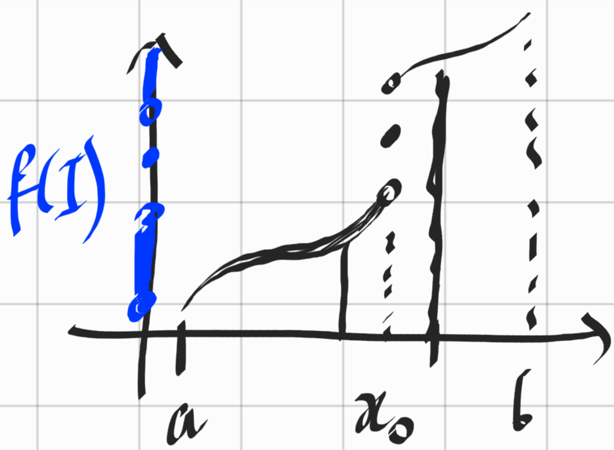
Teorema (continuità delle fn. monotone)

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e

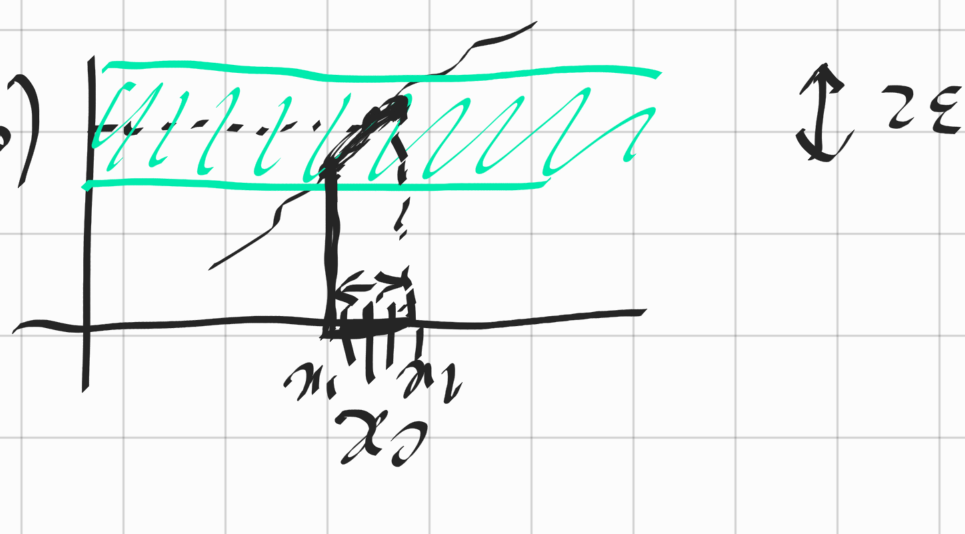
$f : I \to \mathbb{R}$ è monotona allora

f continua $\Leftarrow$ $f(I)$ è un intervallo

idea



dim Supponiamo f crescente



$\forall \varepsilon > 0$ devo trovare $\delta > 0$

se $\underline{|f(x_1) - f(x_0)|} < \varepsilon \Rightarrow$

con $\boxed{x_1 < x_0}$

allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall \; \underline{x \in (x_1, x_0)}$ $\quad x_1 < x < x_0$

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_0)$$

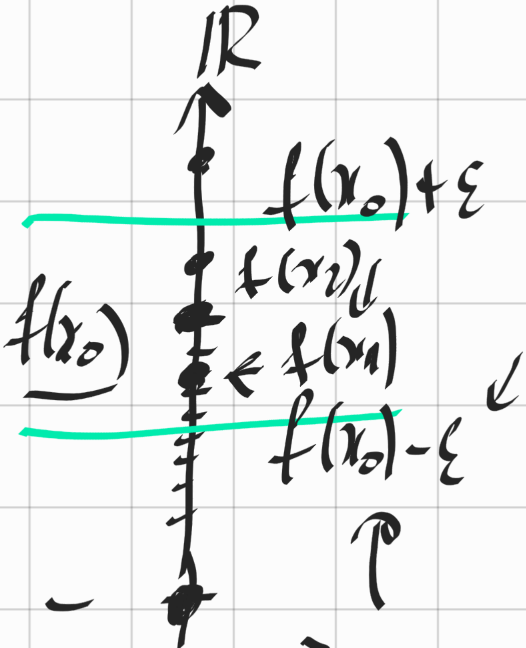
f crescente

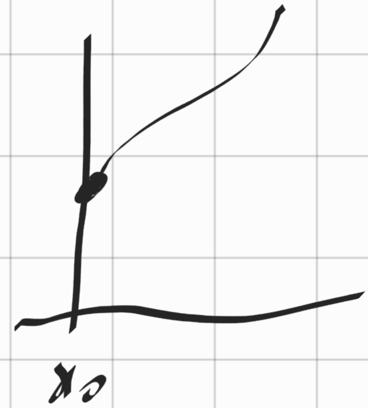
Basta trovare $x_1 < x_0$

con $f(x_1) > f(x_0) - \varepsilon$

e $x_2 > x_0$

$f(x_2) < f(x_0) + \varepsilon$





$\exists\, x_1 \;\; x_2 :$

$$f(x_0)-\varepsilon < f(x_1) < f(x_0) < f(x_2) < f(x_0)+\varepsilon$$

$$\delta = \min\{x_0 - x_1 ,\; x_2 - x_0\}$$

$\square$

$\forall x \qquad x_1 < x < x_0$

f crescente

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_0)$$

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Applichiamo il teorema a

$f(x) = \boxed{a^x}$ $\quad 1^x = 1 \quad a > 0, a \neq 1.$

f è strett. monotona

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

è bigettiva

$\mathbb{R}$ è un intervallo

$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ è un intervallo

$\Rightarrow f$ è continua!

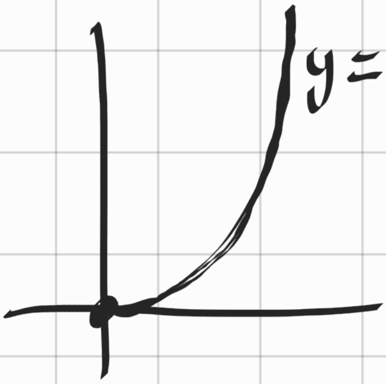
Stessa cosa per $\log_a x$

$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

è continua!

$f(x) = \underline{x^\alpha}$ $\quad$ $\alpha > 0$ $\quad$ $f : [0, +\infty) \to \underline{\underline{[0, +\infty)}}$

$\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$



è crescente, perché: $\boxed{x_1 < x_2}$ $\quad$ $\frac{x_2}{x_1} > 1$

$$\underline{\underline{x_2^\alpha}} = \left(\frac{x_2}{x_1} \cdot x_1\right)^\alpha = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha \cdot x_1^\alpha$$

$$> \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^0 \cdot x_1^\alpha = 1 \cdot x_1^\alpha = \underline{\underline{x_1^\alpha}}$$

f è bigettiva perché invertibile

$$(x^\alpha)^{1/\alpha} = x^1 = x.$$

$y \in [0, +\infty)$ $\quad$ $\underline{x^\alpha = y}$ se $x = y^{1/\alpha}$.

In particolare

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{se } \underline{\underline{x \geq 0}}$$

è continua $\square$

$f(x) = x^{\alpha} \qquad \alpha < 0$

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

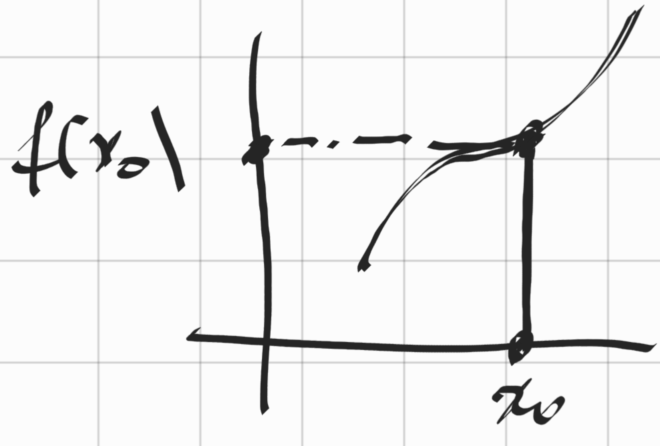
$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

$\square$

Es

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x - \log_2 x)^{\sqrt{2}}}{(3\sqrt{3})^{x+2}}}$$ è continua.

LIMITI



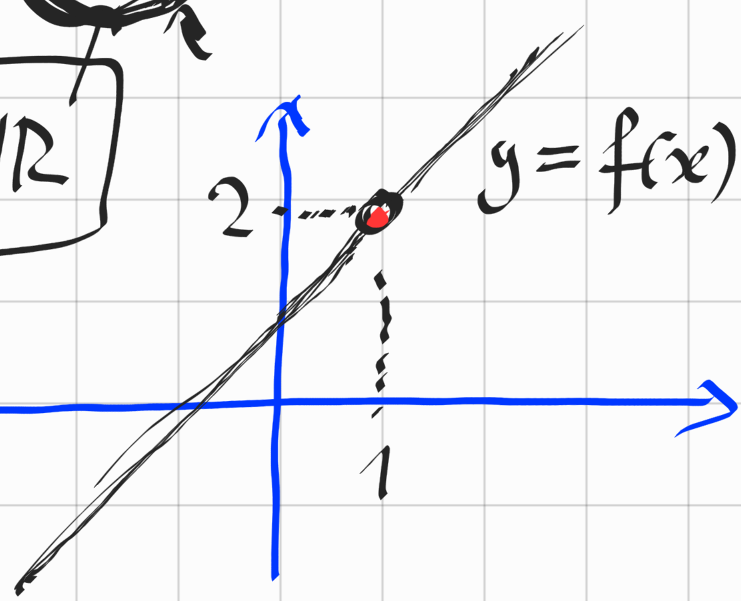
Se f non è definita in x_0?

Es. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$= x+1$ se $x \neq 1$

$$\boxed{f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}}$$

$$x \mapsto x+1$$



Vorrei dire che per x vicino a 1

la funzione $f(x)$ assume valori vicini a 2

Scriveremo: $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2}$

Diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

se la funzione:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0.

(se $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell}$$

se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\underline{\underline{\tilde{f}(x)}} - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon$$

$\tilde{f}(x_0) = \ell$

$$\ldots\ \ldots \quad \text{se } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \ell| < \varepsilon$$

$\boxed{\tilde{f}(x) = f(x)}$ se $x \neq x_0$

$$\ldots\ \ldots \quad x \in A,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in A,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

$$\tilde{f}(x_0) = \ell$$

Isomorfismi:

se R, S sono gruppi totalmente ordinati, densi, continui

Fissato $u \in R$, $m \in S$

$\exists!\ f: R \to S$

monotona

omomorfismo $f(x * y) = f(x) * f(y)$

inoltre se $m \neq e$

f è biiettiva

strettamente monotona.

$\underline{\underline{a^x}}$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$\underline{\underline{\log_a x}}$ $\quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$\boxed{a^x = y}$ ha sol. se $y > 0$

$x = \log_a y$ è la soluzione.