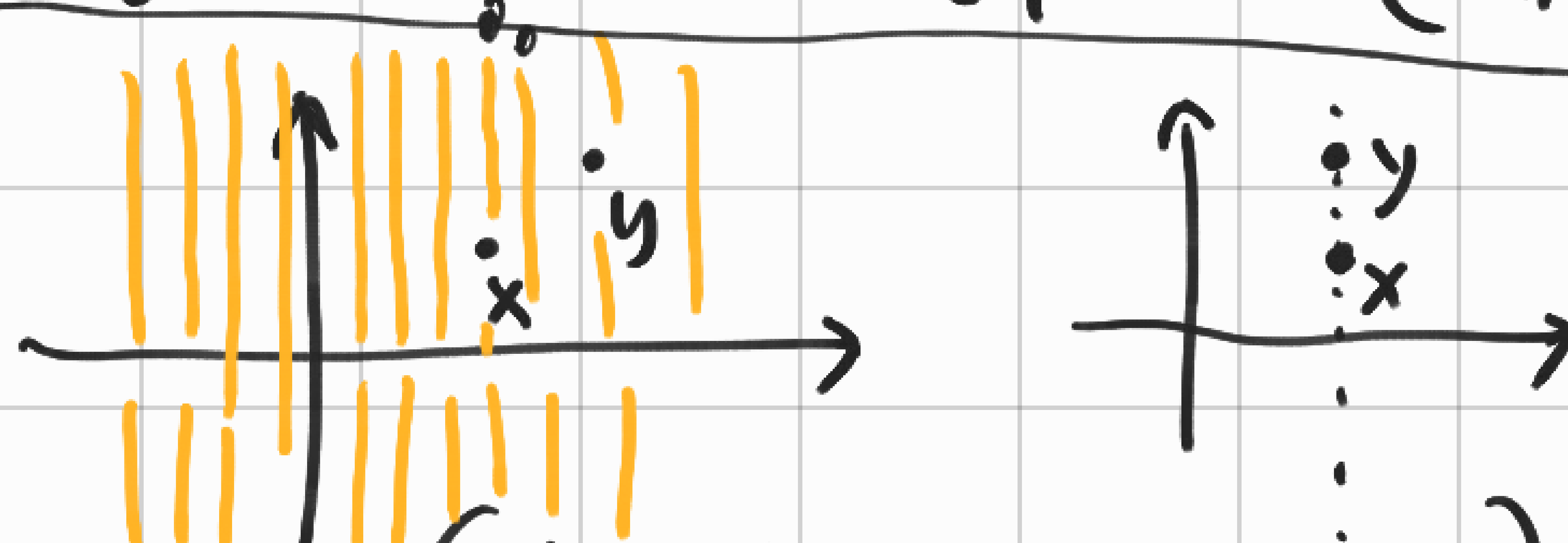
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 8 — 9.10.2020

Esercizio su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

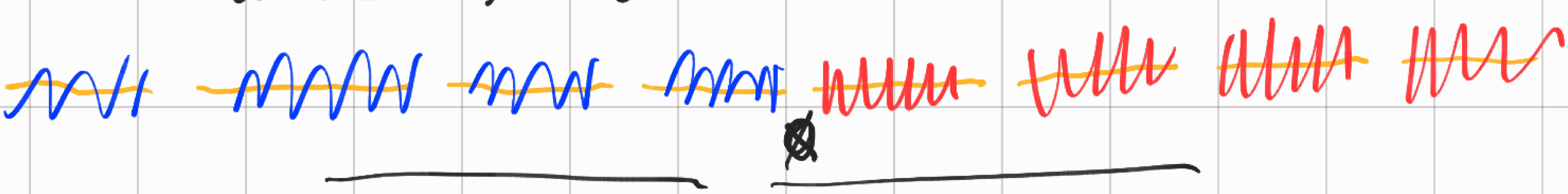
ordinamento lessicografico: $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$

$$\boxed{x \le y \text{ se } x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \le y_2)}$$

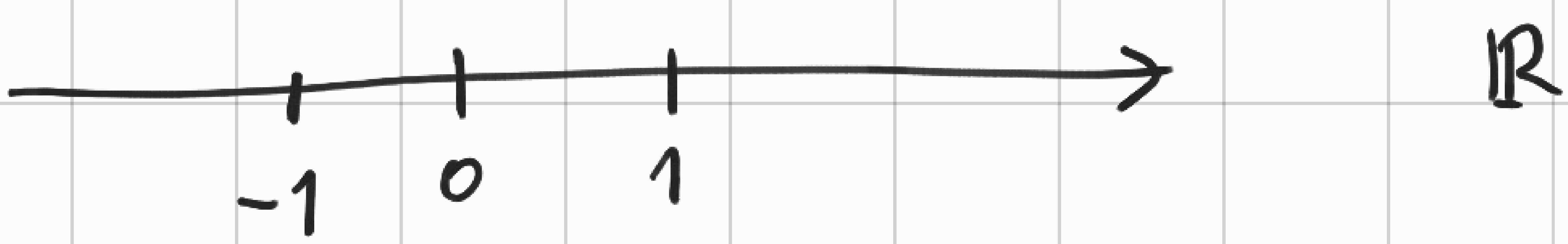


$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$(\mathbb{R}^2, \le, +)$ è un gruppo ordinato, ordine totale ma non è continuo.

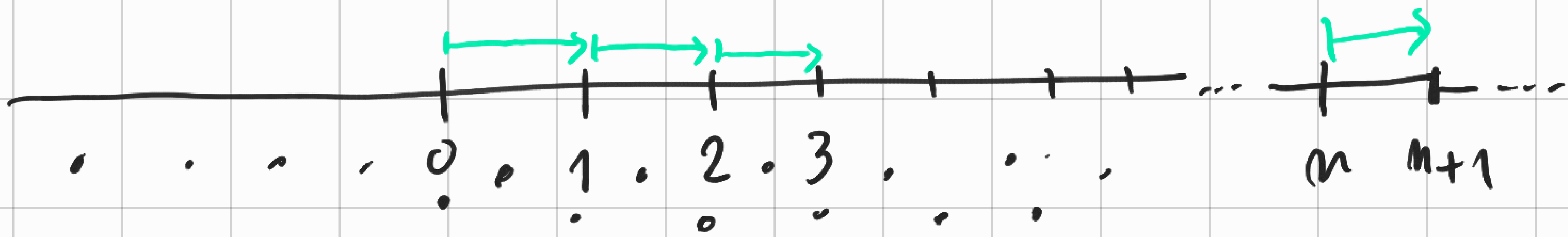


NUMERI REALI



Operazione di sottrazione: $x - y = x + (-y)$

$$(-y) + y = 0.$$



$2 = 1+1 > 1+0 = 1 \qquad 3 = 2+1 \qquad 4 = 3+1$

$\dots\dots \quad 9 = 8+1.$

Vorrei definire $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ che abbia queste proprietà:

$\mathbb{N}$ è il "più piccolo" sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che:

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} (i) \quad 0 \in \mathbb{N} \\ (ii) \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Diciamo che $A \subseteq \mathbb{R}$ è <u>induttivo</u> se $\begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in A : n+1 \in A \end{cases}$

$$\mathbb{N} := \bigcap_{A \text{ induttivo}} A = \bigcap \{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A \text{ è } \underline{\text{induttivo}} \}$$

$\mathbb{R}$ è induttivo $\Rightarrow$ la famiglia non è vuota.

$0 \overset{?}{\in} \mathbb{N}$: $\quad A$ induttivo $\Rightarrow 0 \in A$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} n+1 \in \mathbb{N} \\ \Downarrow \\ \forall A \text{ induttivo} : n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{array}\right\} \mathbb{N} \text{ è induttivo}$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \qquad -\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esercizio Dimostrare che se $n \in \mathbb{N}$ allora $n \geq 0$.

$P(n): \ n \geq 0$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ è induttivo

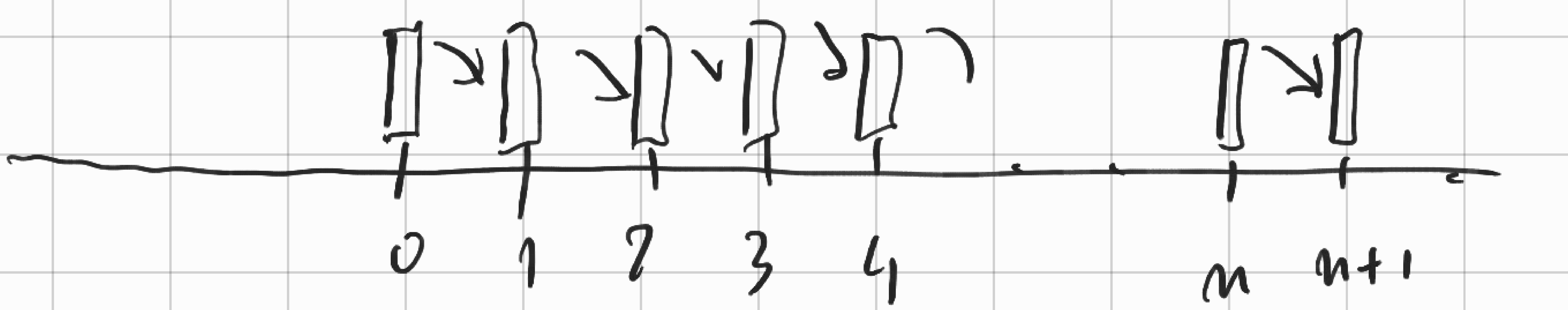
(i) $0 \geq 0$ $\quad 1 \geq 0$

(ii) $x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq x+0 = x \geq 0$

$\mathbb{N} \in A$

Principio di induzione Sia $P(n)$ un predicato nella variabile $n \in \mathbb{N}$.

Se $\begin{cases} (i) & P(0) \text{ è vera} \\ (ii) & P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$ Allora $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.



Esercizio Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0$ con il principio di induzione:

$P(n): \ n \geq 0$

→ (i) $P(0): \ 0 \geq 0$ ✓

→ (ii) $P(n) \overset{?}{\Rightarrow} P(n+1)$: ✓

$P(n)$ $\Updownarrow$ $P(n+1)$ $\Updownarrow$

$n \geq 0 \implies n+1 \geq 1 \geq 0 \iff n+1 \geq 0$

Allora $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$ cioè $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 0$.

<u>dim</u> (principio di induzione)

$A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\} \subseteq \mathbb{N}$

A è induttivo? ipotesi Ipotesi

(i) $P(0) \implies 0 \in A$

(ii) $n \in A \iff P(n) \implies P(n+1) \iff n+1 \in A$

$\mathbb{N} \subseteq A$ ma $A \subseteq \mathbb{N} \implies A = \mathbb{N}$

quindi $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$. $\square$

$\mathbb{N} = \bigcap \{\text{insiemi induttivi}\}$

$x \in \mathbb{N} \iff x \in I : \forall I$ induttivo

Esercizio Dimostrare che:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N}: m+m=n\right) \vee \left(\exists m \in \mathbb{N}: m+m+1=n\right)}_{P(n)}$$

n pari $\quad$ $n-1$ è pari

n dispari: $\neg \exists m \in \mathbb{N}: m+m=n$

dim $\quad P(n) \quad$ (i) $P(0)$: $0+0=0$

$\exists m \in \mathbb{N}: m+m=0$ ok

(ii) $P(n)$: $\quad$ (n pari)

$$\begin{cases} \text{se } m+m=n \Rightarrow n+1 = m+m+1 \\ \qquad \Rightarrow P(n+1) \\ \text{se } \overbrace{m+m}+1=n \Rightarrow n+1 = m+m+1+1 \\ \qquad = (m+1)+(m+1) \end{cases}$$

$$n+1 = \underbrace{(m+1)}_{k} + \underbrace{(m+1)}_{k}$$

$k = m+1 \qquad \exists k: n+1 = k+k$.

$\exists m: n+1 = m+m$.

$n = 10 = 5+5 \qquad n+1 = 11 = 5+5+1$

$n = 13 = 6+6+1 \qquad n+1 = 14 = 7+7 \quad \square$

Utilizzando il principio di induzione si possono dimostrare banalità quali:

$\forall n, m \in \mathbb{N}$

(i) $n \geq 0$ (già detto)

(ii) $n+m \in \mathbb{N}$

(iii) $n+m = m+n$

(iv) $n \geq m \Rightarrow n-m \in \mathbb{N}$

(v) $n > m \Rightarrow n \geq m+1$

Definizioni per induzione (o ricorsiva):

Es: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che: $g(x) = x + x$

$$\begin{cases} \text{(i)} & f(0) = 1 \\ \text{(ii)} & f(n+1) \overset{(*)}{=} f(n) + f(n) \end{cases}$$

$n = 1$

(Teor $\exists! \, f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che soddisfa queste proprietà).

$f(0) = 1$, $f(1) = f(0+1) \overset{(*)}{=} f(0) + f(0) = 1+1 = 2$

$f(2) = f(1+1) \overset{(*)}{=} f(1) + f(1) = 2+2 = 4$

$f(3) \overset{(*)}{=} f(2)+f(2) = 4+4 = 8$

$\vdots$

$f(n+1) = f(n)+f(n) = [\ 2^{n+1}]$

In generale

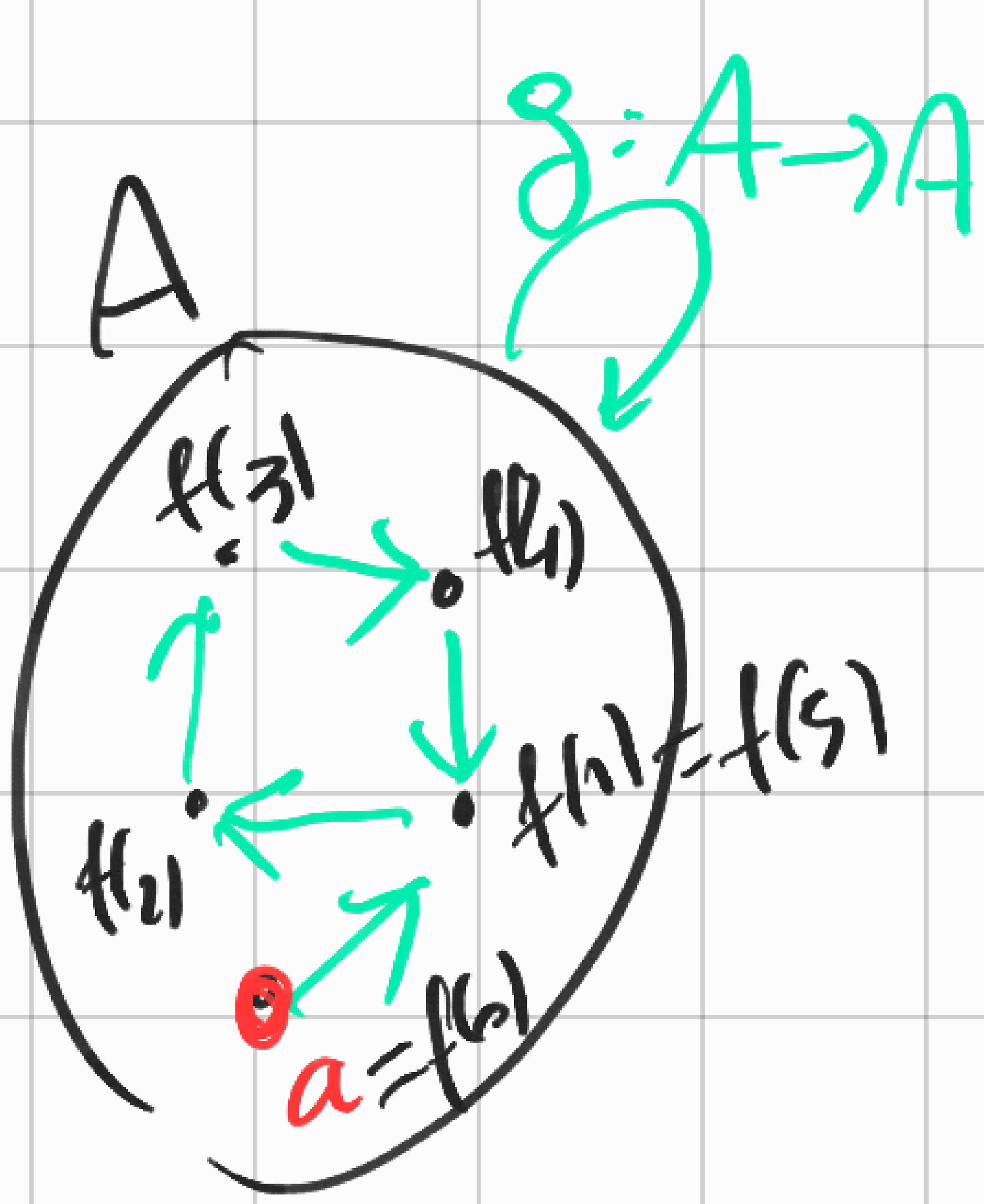
Teor. (definizione per induzione)

A insieme $\qquad g: A \to A$

Fissato $a \in A$: $\exists!\ f: \mathbb{N} \to A$ tale che

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(n+1) = g(f(n)) \end{cases}$$

$\square$



Moltiplicazione:

Definisco $n \cdot x$ con $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ (n+1) \cdot x = n \cdot x + x \end{cases}$$

$0 \cdot x = 0$

$1 \cdot x = x$

$2 \cdot x = x + x$

$3 \cdot x = x + x + x$

$\vdots$

Definisco m^n $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} m^0 = 1 \\ m^{n+1} = m \cdot m^n \end{cases}$$

Definisco $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

$$\begin{cases} 0! = 1 & \leftarrow \text{convenzione.} \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

$0! = 1$

$1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$

$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$

$4! = 4 \cdot 3! = 24$

$5! = 5 \cdot 4! = 120$

$\vdots$

$1 \cdot 3 = 3$

$$n \cdot 3 = 0 + \underbrace{3 + 3 + 3 + \ldots + 3}_{n \text{ volte}}$$

$$3^n = 1 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}_{n}$$

$$3^0 = 1$$

$$0! = 1$$

$$0^0 = 1. \quad \square$$