lezione 20.4.2020

# ANALISI MATEMATICA
## LEZIONE 78
## 20. 4. 2020

Esercizio 1 test settimanale

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Già visto

Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge allora $F(x) \to 0$.

$$G(x) = \int_1^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$G(x) \to \ell \in \mathbb{R}.$$

$$F(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{G(2x)} - \underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{G(x)} \to 0$$

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema di Cauchy

$u \in C^0 \leftarrow$ spazio vettoriale

vogliamo mettere su $C^0$ una struttura topologica.

## Spazio metrico

Sia $X$ un insieme,

$d : X \times X \to \mathbb{R}$

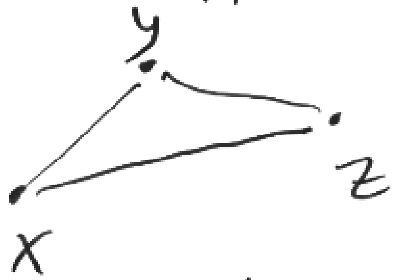
$d(x,y)$ = distanza tra $x$ e $y$

tale che:

(i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

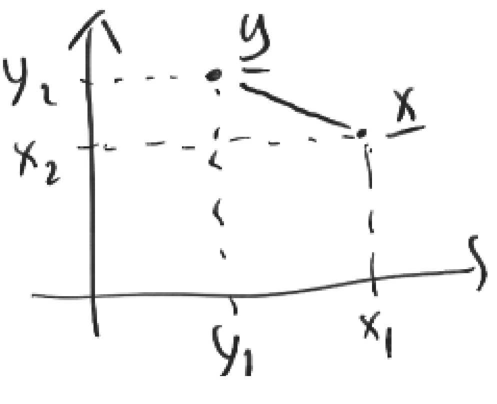



Se $d$ soddisfa queste proprietà diremo che $d$ è una distanza e che $X$ è uno spazio metrico.

Es $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

$\mathbb{C}$, $d(z,w) = |z-w|$

$\mathbb{R}^n$, $d(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$



La distanza induce una __convergenza__

__def__ $x_n, x \in X$ spazio metrico

diremo che $x_n$ __converge__ a $x$

e scriveremo $x_n \to x$ se

$$d(x_n, x) \to 0 .$$

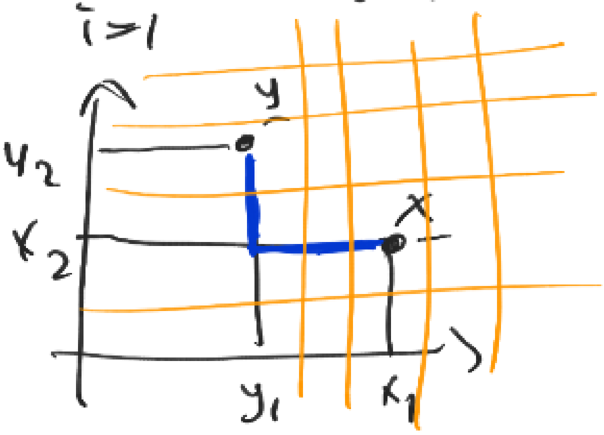
$\boxed{\text{in } \mathbb{R}}$

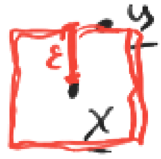
---

__Es__ in $\mathbb{R}^n$

$$d_1(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

__distanza Manhattan__




$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Osservazione in $\mathbb{R}^n$ queste sono distanze che inducono la stessa convergenza della distanza euclidea.

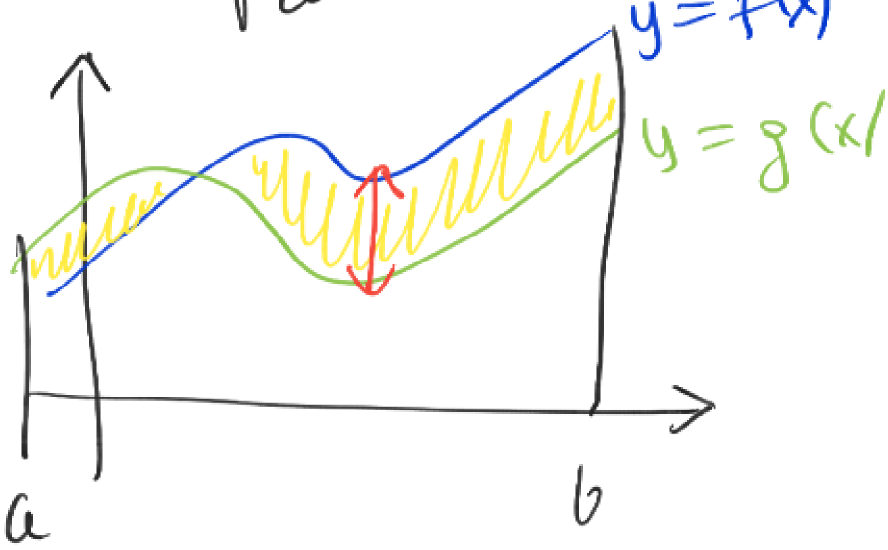
---

$X = C(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$
$= \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$

$X$ è uno spazio vettoriale reale.

$A = [a,b]$

$$d(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx}$$




Es $V$ è uno spazio vettoriale

se $\langle v, w \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo

allora $d(v,w) = \sqrt{\langle v-w, v-w \rangle}$

---

In questo caso $d$ si chiama **distanza euclidea**

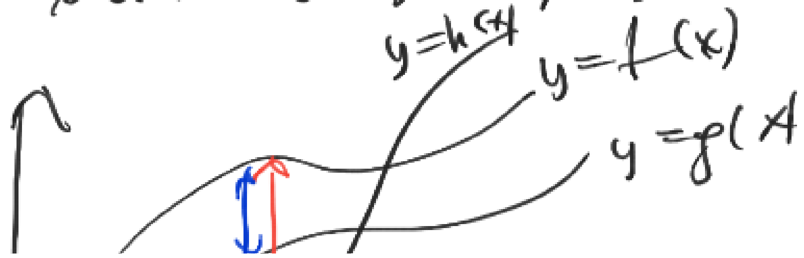
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

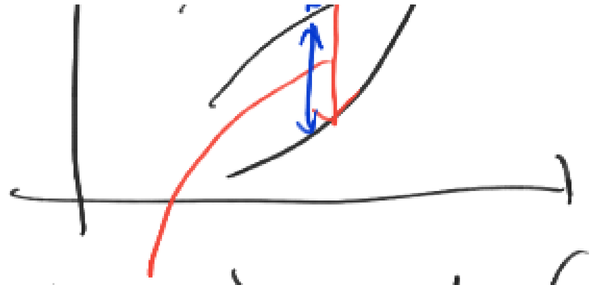
---

Sulle funzioni continue $f, g : A \to \mathbb{R}$ definiamo la **distanza uniforme**

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

$d_\infty$ è una distanza.





$$d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$

---

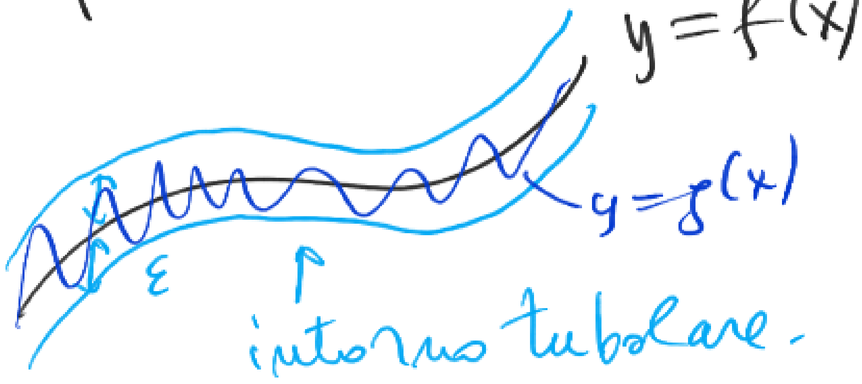
Norma uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$$

---

Oss $\quad d_\infty(f,g) \leq \varepsilon \iff \forall x \quad |f(x)-g(x)| < \varepsilon$




$f_k \longrightarrow f$ uniformemente se

$$d_\infty(f_k, f) \to 0$$

potremmo anche scrivere $f_k \to f$

---

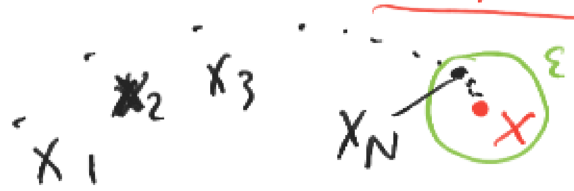
**Def** (Completezza) $X$ spazio metrico

**Def** (Successione di Cauchy)

Una successione $x_k \in X$ si dice **di Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall k, j > N \quad d(x_k, x_j) < \varepsilon.$$

$$\leq d(x_k, x) + d(x_j, x)$$




(si potrebbe scrivere $\lim_{k,j \to +\infty} d(x_k, x_j) = 0$)

---

Diremo che $X$ è **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

Es $\mathbb{Q}$, $d(x,y) = |x-y|$

non è completo.

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$1/n$

Teorema Se $x_k \to x$ allora $x_k$ è di Cauchy.

Teorema $X = C([a,b])$ con $d_\infty$ è uno spazio metrico completo

Teorema (continuità del limite uniforme).

Se $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue $k = 0, 1, 2, \dots n, \dots$

e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è tale che

$f_k \rightrightarrows f$.

Allora $f$ è continua.

dim Devo mostrare che $\forall x_0 \in [a,b)$

Tesi $f$ è continua in $x_0$.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$

$f_k \rightrightarrows f$ , $f_k$ è continua.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall k \geq N \ d_\infty(f_k, f) < \varepsilon.$

Scelgo $k = N$ $\boxed{d_\infty(f_N, f) < \varepsilon.}$

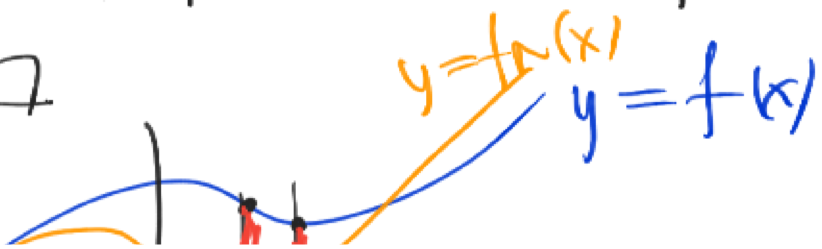
$f_N$ è continua in $x_0$:

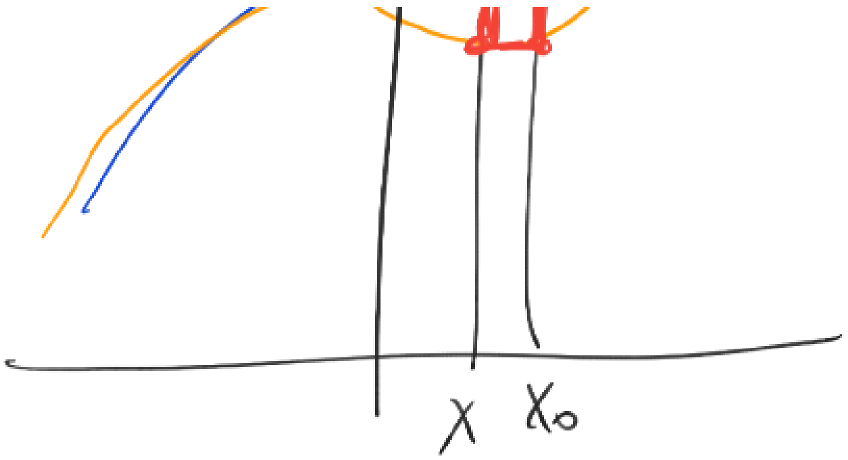
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \overbrace{\boxed{|f(x) - f_N(x)|}}^{\leq \varepsilon} + \overbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}^{< \varepsilon}$$

$$+ |f_N(x_0) - f(x_0)|^{\leq \varepsilon}$$

$\leq 3\varepsilon.$ $\square$






**Teorema** $\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$

è completo.

**dim** Sia $x_n$ successione di Cauchy

cioè: $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall k,j > N: |x_k - x_j| < \varepsilon$.

allora esiste $x\in\mathbb{R}$ tale che

$x_k \to x$.

---

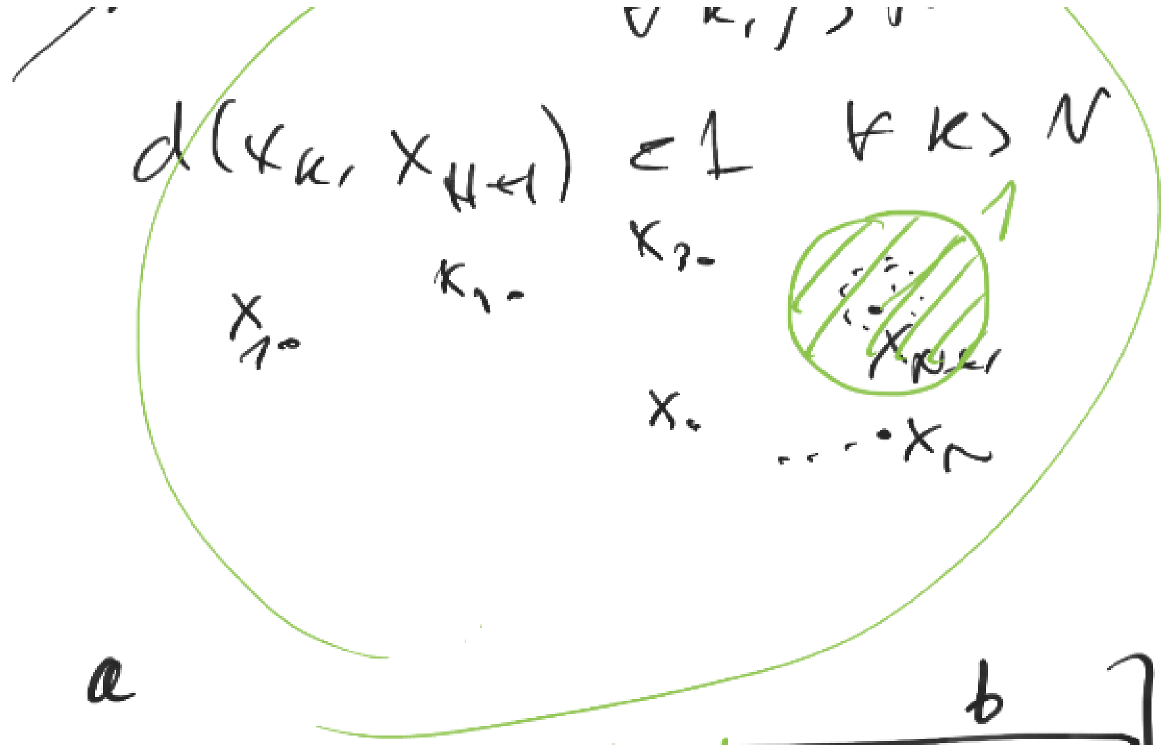
① Se $x_k$ è di Cauchy

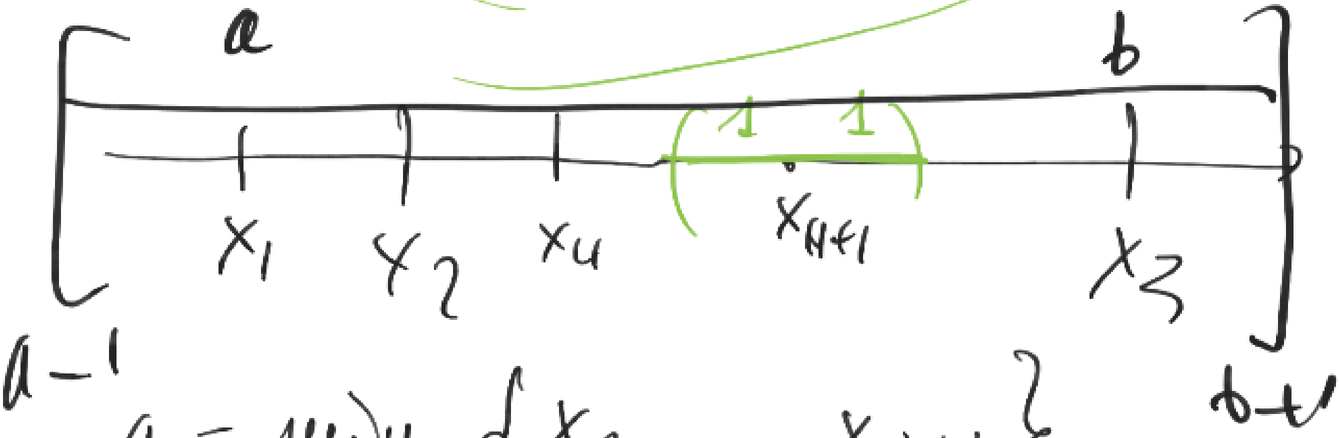
allora $x_k$ è limitata.

per $\varepsilon=1$ $\exists N: d(x_k,x_j)<1$

$\forall k,j > N$

$d(x_k, x_{N+1}) < 1 \quad \forall k > N$




$a = \min\{x_1, \dots, x_{N+1}\}$

$b = \max\{x_1, \dots, x_{N+1}\}$

$x_k \in [a-1, b+1], \forall k \in \mathbb{N}$

$x_k$ è limitata

$x_k \in [a, b]$

Per B-W $\exists\ x_{k_j} \to x$.


Se $x_k$ è di Cauchy e

$x_{k_j} \to x$ allora $x_k \to x$.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : k, j > N$

$d(x_k, x_j) < \varepsilon$

$\exists j : d(x_{k_j}, x) < \varepsilon$

$d(x_j, x_{k_j}) < 2\varepsilon$.

$\square$

Le successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ sono convergenti.

dim (completezza di $C([a,b])$)

Sia $f_k \in C([a,b])$

$f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua.

Supponiamo che $f_k$ sia di Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ k, j > N$

$$d_\infty(f_k, f_j) < \varepsilon.$$

$\forall x : \quad |f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$

$$\left( d_\infty(f_k, f_j) = \sup_{x \in [a,b]} |f_k(x) - f_j(x)| \right)$$

$\forall x \in [a, b] : \quad f_k(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

$\forall x \ \exists f(x) : \quad f_k(x) \to f(x).$

convergenza puntuale

$\exists f : [a, b] \to \mathbb{R}.$

Verifichiamo che $d_\infty(f_k, f) \to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall k, j > N$

$$\boxed{d_\infty(f_k, f_j) < \varepsilon.}$$

Fissato $\varepsilon > 0$

devo mostrare che $\exists N : \forall k > N$

$\forall x \in [a, b] \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in [a,b] : |f_k(x) - f(x)|$

So che $\quad f_j(x) \to f(x)$.

$$\exists j : |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$\forall k > N$

$$|f_k(x) - f(x)| \le \underbrace{|f_k(x) - f_j(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_j(x) - f(x)|}_{<\varepsilon}$$

$$\le 2\varepsilon.$$

Dunque $\quad f_k \rightrightarrows f$.

$f_k$ continue $\Rightarrow f$ continua.

$$f \in C([a,b])$$

$\square$.

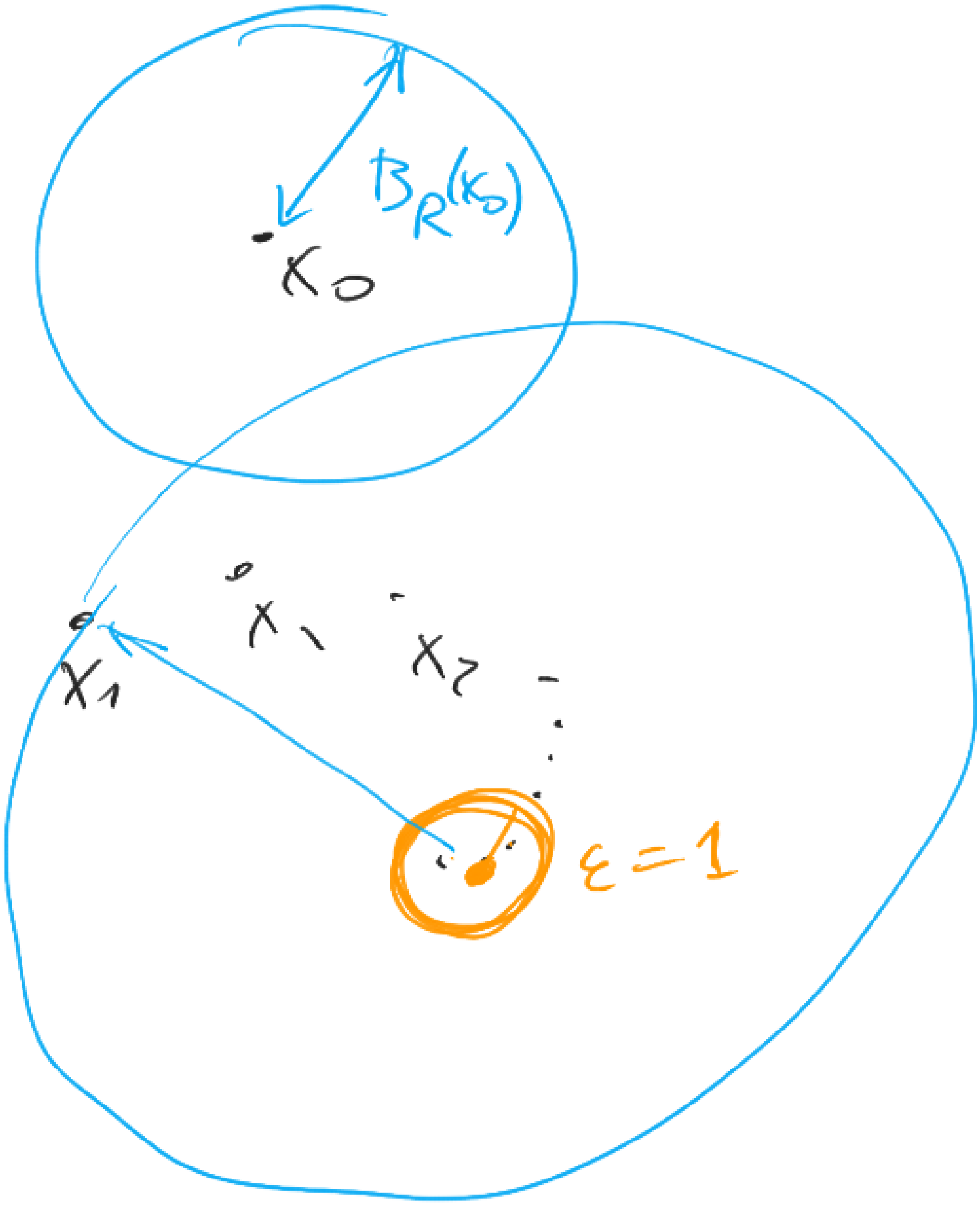
---

$x_k$ è di Cauchy

$x_n$ e limitata.

( $x_k \in B_R(x_0)$ )

$B_R(x_0) = \{x : d(x, x_0) < R\}$




1.