Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

23 Febbraio 2011- **COMPITO 1**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

(4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (*a*) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{n^2\sin(n)+3n^3}$ (*b*) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) e

(5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int \frac{\log(x)}{x\cos^2(3\log^2(x)+5)}\ dx$.

$y = \log(x)$

$= \int y \log(3y^2+5)\,dy = \frac{1}{6}\log(3y^2+5) + c$

(5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \arctan(\frac{1}{\log(x+1)})$.

$\mathrm{Dom}\, f = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

$\lim_{x\to(-1)^+} f = 0$ $\lim_{x\to 0^+} f = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 0^-} f = -\pi/2$ $\lim_{x\to+\infty} f = 0$

NO as. vert.
NO as. obb.
As. oriz. per $x\to+\infty$.

(5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = x^2\, e^{(1-x)}$.

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$ no max ass.

$\lim_{x\to+\infty} f = 0$

$f' = e^{1-x}(2x - x^2)$

$x = 0$ min. loc. e assol.
$x = 2$ max loc.

compito 1.

(5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \frac{2}{3}xy + \frac{e^{x^2}\cos x}{3y^2}$.

Bernoulli $z = y^3$ $z' = 3y^2y'$

$z' = 2xz + e^{x^2}\cos x$

$z(x) = e^{x^2}[\operatorname{sen} x + c]$

$y(x) = (\operatorname{sen} x + c)^{1/3} e^{\frac{x^2}{3}}$

(4 punti) In un lancio di due dadi equilibrati siano: E l'evento che esattamente uno dei due dadi faccia sei; F l'evento che la somma dei due dadi sia sette. Calcolare la probabilitá di E e di F e stabilire se sono tra loro indipendenti.

$P(E) = \frac{5}{18}$ $P(F) = \frac{1}{6}$ E e F no indipendenti

(4 punti) In un gioco il giocatore lancia quattro monete equilibrate e vince 2 Euro per ogni Testa uscita e un Euro per ogni Croce uscita. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria che associa ad un lancio delle quattro monete il valore della vincita corrispondente.

6

(8 punti) **Definizione di limite e Teorema del prodotto di una successione limitata per una infinitesima.**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

23 Febbraio 2011- **COMPITO 2**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

(4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n-1})(\frac{n^2+7n}{n^2+1})$ (b) $\lim_{x\to 0^-}(1+x^2)^{\frac{1}{x^3}}$

(a) $+\infty$ (b) 0

(5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}(x-5)}\,dx$.

$\sqrt{x-1}=t$ $= 2\int \frac{t^2+1}{t^2-4}\,dt = 2t + 10\int\frac{dt}{t^2-4} =$

$dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ $= 2t + \frac{10}{4}\log\left(\frac{t-2}{t+3}\right)+k$

$x = 1+t^2$

(5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x)=\log(\frac{x^2}{2-x^2})$.

$\mathrm{Dom}(f) = (-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$ f pari — AV $x=\pm\sqrt{2}$

AV in $x=0^{\pm}$

$\lim_{\substack{x\to(-\sqrt{2})^+\\ x\to(\sqrt{2})^+}} f = +\infty$ $\lim_{x\to 0^{\pm}} f = -\infty$

(5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x)=e^{2x}-e^{3x}$.

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f = -\infty$ $\nexists$ max ass.

$\lim_{x\to-\infty} f = 0$

$f' = 2e^{2x}-3e^{3x}=0 \iff \frac{2}{3}=e^x \Rightarrow x=\log\frac{2}{3}$

$x=\log\frac{2}{3}$ max ass

$\nexists$ max loc $\neq \log\frac{2}{3}$

$\nexists$ min loc.

Comp. 2

(5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' - y = xy^5$.

Bernoulli $z = \frac{1}{y^4}$ $z' = -4\frac{y'}{y^5}$ $z' = -4z - 4x$

$$y = \left[\frac{e^{4x}}{(\frac{1}{4}-x)e^{4x}+k}\right]^{\frac{1}{4}}$$

(4 punti) In un urna ci sono 90 palline numerate da 1 a 90. Viene estratta una pallina a caso e successivamente, dopo che la prima pallina é stata reinserita nell'urna, ne viene estratta una seconda. Sia E l'evento che esattamente una delle due palline abbia un numero compreso tra 1 e 30 (estremi inclusi). Calcolare la probabilitá di E.

$\frac{4}{9}$

(4 punti) In una lotteria si vendono 200 biglietti di cui: uno da una vincita di 1000 Euro; 5 danno una vincita di 100 Euro; 10 danno una vincita di 20 Euro. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria che associa ad un biglietto preso a caso tra i 200 a disposizione, la vincita corrispondente.

$\frac{17}{2}$

(8 punti) **Continuitá delle funzioni derivabili. Derivata della somma, del prodotto.**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

23 Febbraio 2011- **COMPITO 3**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

(4 punti) Calcolare i seguenti limiti: $(a)\quad \lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{5n^2-n})(\frac{n^2+4n}{3n^2+5})$ $\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$

(a) $-\infty$ (b) e

(5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int \frac{\log(x)}{x}\cos(3\log^2(x)-5)\quad dx.$

$y=\log x$ $\quad = \int y \cos(3y^2-5)\,dy = \frac{1}{6}\sin(3y^2-5)+k$

$dy=\frac{dx}{x}$

(5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x)=\arctan(\frac{1}{1-x^2})$.

$\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$\lim_{x\to 1^{\pm}} f = \pm\frac{\pi}{2}$ $\qquad f(x)=f(-x)$ pari

$\lim_{x\to+\infty} f = 0$

no Asint V

no Asint. Ob

A o. a $\pm\infty$

(5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x)=\log(\frac{x^2}{x^2-2})$.

$\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

$\lim_{x\to(\sqrt{2})^{\pm}} f = +\infty$ no max

$\lim_{x\to\pm\infty} f = 0$

$f'=\frac{-4x}{x^2(x^2-2)}$

$f \searrow (\sqrt{2},+\infty)$

$f \nearrow (-\infty,-\sqrt{2})$

no Min ass / no Min loc / no Max loc

3 compito.

(5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 10y' + 25y = 0$ tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$.

$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$

$\lambda = 5$

$y(t) = (c_1 + c_2) e^{5t}$

$2 = y(0) = c_1$

$1 = y'(0) = c_2 + 5c_1 = c_2 + 10$

$y(t) = (2 - 9t) e^{5t}$

(4 punti) In un lancio di due dadi equilibrati siano: E l'evento che almeno uno dei due dadi faccia sei; F l'evento che la somma dei due dadi sia otto. Calcolare la probabilitá di E e di F e stabilire se sono tra loro indipendenti.

$P(E) = \frac{11}{36}$ $\quad P(F) = \frac{5}{36}$ $\quad E, F$ no indipendenti

(4 punti) In un gioco il giocatore lancia cinque monete equilibrate e vince 2 Euro per ogni Testa uscita e 0 Euro per ogni Croce uscita. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria che associa ad un lancio delle cinque monete il valore della vincita corrispondente.

5

(8 punti) **Teorema di Lagrage e Caratterizzazione delle primitive in un intervallo.**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

23 Febbraio 2011- **COMPITO 4**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

(4 punti) Calcolare i seguenti limiti: $(a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n-2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+2}\left(\frac{3n^2-1}{5-7n^2}\right)$ $\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{x}{2x+1}}$

(a) 0 $\qquad$ (b) 1

(5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)-4\sin(x)-6}\, dx.$

$$= \int \frac{\cos x}{-5-4\,\text{sen}\,x-\text{sen}^2 x} = -\int \frac{dy}{y^2+4y+5} = -\int \frac{dy}{(y+2)^2+1} =$$

$y = \text{sen}\,x$

$dy = \cos x\, dx$

$$= -\text{arctg}(y+2)+k.$$

(5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2x}{x-1}.$

$\text{Dom}(f) = (-\infty,0)\cup(0,1)(1,+\infty)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f = 2$

$\lim_{x\to 1^\pm} f = \pm\infty$

$\lim_{x\to 0^\pm} f = \pm\frac{\pi}{2}$

As. oriz. a $\pm\infty$ a quota 2

As. vert. $\pm\infty$ in $1^\pm$

$\nexists$ Asint. Obb.

(5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \log\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}\right).$

$\text{Dom}(f) = (0,1)\cup(1,+\infty)$

$\lim_{x\to 0^+} f = -\infty$ $\quad \nexists$ min. ass.

$\lim_{x\to +\infty} f = +\infty$ $\quad \nexists$ max ass.

$\lim_{x\to 1^\pm} f = +\infty$

$f'(x) = 0$

$x = 3$

$x = 3$ min loc.

4 compito.

(5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + 2xy + xy^4 = 0$.

Bernoulli $z = \frac{1}{y^3}$ $z' = -\frac{3y'}{y^4}$

$z' = 6xz + 3x$

$z = -\frac{1}{2} + ce^{3x^2}$ $y = \left(\frac{1}{z}\right)^{1/3}$

(4 punti) In un urna ci sono 90 palline numerate da 1 a 90. Viene estratta una pallina a caso e successivamente, dopo che la prima pallina e' stata reinserita nell'urna, ne viene estratta una seconda. Sia E l'evento che esattamente una delle due palline abbia un numero compreso tra 1 e 60 (estremi inclusi). Calcolare la probabilitá di E.

$\frac{4}{9}$

(4 punti) In una lotteria si vendono 100 biglietti di cui: uno da una vincita di 100 Euro; 5 danno una vincita di 50 Euro; 10 danno una vincita di 20 Euro. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria che associa ad un biglietto preso a caso tra i 100 a disposizione, la vincita corrispondente.

$\frac{11}{2}$

(8 punti) **Minimi e Massimi relativi ed assoluti e il Teorema di Fermat.**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

23 Febbraio 2011- **COMPITO 5**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

(4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (*a*) $\lim_{n\to\infty}(n^2+8n)^{\frac{1}{n}}\,(\frac{n^2 2^n}{3^n})$ (*b*) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2})^{\frac{2x}{x+1}}$

(a) 0 (b) 1

(5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int \frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(x-6\sqrt{x}+8)}\ dx.$

$y=\sqrt{x}$

$dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$= 2\int \frac{3y-4}{y^2-6y+8}\,dy = 2\int\frac{4}{y-4} - \int\frac{1}{y-2} =$

$= 2(4\log|y-4| - \log|y-2| + c)$

(5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}+\arctan(\frac{1-x}{1+x})$.

$Dom(f) = \mathbb{R}-\{1\}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f = -\pi/4$

$\lim_{x\to(-1)^\pm} f = \pm\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

Asint oriz a $\pm\infty$ $-\pi/4$

$\nexists$ Asint. Vert.

$\nexists$ Asint. obb.

(5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x)=x\,e^{\frac{1}{3\log x}}$.

$Dom(f) = (0,+\infty)-\{1\}$

$\lim_{x\to 0^+} f = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$ no max ass.

$\lim_{x\to 1^-} f = 0$ $\lim_{x\to 1^+} f = +\infty$

$f' = e^{\frac{1}{3\log x}}\left[1-\frac{3}{(3\log x)^2}\right]$

$f'=0$ $x=e^{\mp\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$x=e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ max loc.

$x=e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ min loc. $\nexists$ min. ass.

5 compito

(5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$.

$z = \frac{1}{y^3}$ $\qquad z' = -\frac{3y'}{y^4}$

$z = e^x \left[\int (2x-1)\, e^{-x}\, dx + C \right]$ $\qquad y = \frac{e^{-x/3}}{\left(k - e^{-x}(2x+1)\right)^{1/3}}$

(4 punti) In un lancio di due dadi equilibrati siano: E l'evento che esattamente uno dei due dadi faccia quattro; F l'evento che la somma dei due dadi sia cinque. Calcolare la probabilitá di E e di F e stabilire se sono tra loro indipendenti.

$p(E) = \frac{5}{18}$ $\qquad p(F) = \frac{1}{9}$ $\qquad$ E, F non indip.

(4 punti) In un gioco il giocatore lancia quattro monete equilibrate e vince 2 Euro per ogni Testa uscita, mentre perde un Euro per ogni Croce uscita. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria che associa ad un lancio delle quattro monete il valore della vincita corrispondente.

2

(8 punti) **Criterio di monotonia: condizioni necessarie e sufficienti per la crescenza e decrescenza di una funzione derivabile.**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

23 Febbraio 2011- **COMPITO 6**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

(4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^3+9}{5n-n^3})\arctan(\frac{n^2+8n}{n+1})$ (b) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(2x)}{x})^{(1+x)}$

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) 2

(5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int \log(\sqrt{x+1}-5)\ dx$.

$\sqrt{x+1}=t$

$x+1=t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$= 2\int t\log(t-5) =$

$= x^2\log(t-5) - \int \frac{2t}{t-5}\,dt =$

$= t^2\log(t-5) - 2t - 10\log(t-5) + c$

(5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{e^{4x}}{1-2e^{2x}}$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\log(\frac{1}{\sqrt{2}})\}$

$\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f = 0$

$\lim_{x\to(\log\frac{1}{\sqrt{2}})^{\pm}} f = \mp\infty$

AV $+\infty$ in $\log(\frac{1}{\sqrt{2}})^-$

AV $-\infty$ in $\log(\frac{1}{\sqrt{2}})^+$

A oriz. a $-\infty$ quota 0

$\nexists$ As. obl.

(5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = x^{\frac{3}{2}}e^{-x}$

$\mathrm{Dom}(f) = [0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f = 0 = f(0)$

$\lim_{x\to+\infty} f = 0$

$f' = e^{-x}(-x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) =$

$= x^{\frac{1}{2}}e^{-x}(\frac{3}{2}-x)$

$x = \frac{3}{2}$ max locale (e ass.)

$x = 0$ min assoluto (e locale

6 compito

(5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 4y' + 20y = 0$, tale che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$

$\lambda = 2 \pm i4$

$y(t) = e^{2t}(c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t))$

$y(0) = c_1 = 1$

$y'(0) = 2 = 2c_1 + 4c_2 = 2 + 4c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

$y(t) = e^{2t}\cos(4t)$

(4 punti) In un urna ci sono 90 palline numerate da 1 a 90. Viene estratta una pallina a caso e successivamente, dopo che la prima pallina é stata reinserita nell'urna, ne viene estratta una seconda. Sia E l'evento che esattamente una delle due palline abbia un numero compreso tra 30 e 60 (estremi inclusi). Calcolare la probabilitá di E.

$\frac{31 \cdot 59}{45 \cdot 90} = \frac{1829}{4050}$

(4 punti) In una lotteria si vendono 1000 biglietti di cui: uno da una vincita di 500 Euro; 5 danno una vincita di 200 Euro; 10 danno una vincita di 50 Euro. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria che associa ad un biglietto preso a caso tra i 1000 a disposizione, la vincita corrispondente.

2

(8 punti) **Teorema fondamentale del Calcolo Integrale e Formula fondamentale del Calcolo Integrale.**