Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

15 Giugno 2010- COMPITO 1- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: $(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \arctan(n+1))}{(2n+3)^2(n+2)}, \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\cos(3x-1))}{e^{(2x)^3}-1}.$

(a)	(b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{1}{((\log x)^2 - 5\log x + 6)x} \quad dx.$

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = x + \frac{\log(4x-1)}{\log(4x+1)}.$

4. (5 punti) Determinare gli insiemi di crescenza e decrescenza ed gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = x^2 - 6x + 4\log|x|.$

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}y + 1$. Determinare poi le soluzioni che soddisfano la condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty.$

6. (3 punti) Supponiamo di voler partecipare al seguente gioco: si estrae tre volte una carta da un mazzo di 40 (ogni volta rimettendo la carta nel mazzo e rimescolando) e si vincono 100 Euro se abbiamo estratto almeno due cuori. (a) Determinare la probabilitá di vincere. (b) Qual è l'importo equo da pagare per partecipare al gioco?

7. (5 punti) Supponiamo che la tassa di iscrizione a una data università sia così scaglionato a seconda del reddito lordo dello studente (o della sua famiglia):

   500 Euro per redditi fino a 15000 Euro

   1000 Euro per redditi da 15000 a 25000 Euro

   1500 Euro per redditi da 25000 a 35000 Euro

   2000 Euro per redditi oltre 35000 Euro

   Supponendo che il reddito di uno studente sia una variabile aleatoria normalmente distribuita con media 30000 Euro e deviazione standard 10000 Euro, calcolare: (a) la probabilitá che uno studente paghi non più di 1000 Euro di tassa; (b) il valore atteso della tassa per un singolo studente.

8. (8 punti) **Teorema di Lagrange e caratterizzazione delle primitive**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

15 Giugno 2010- COMPITO 2- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\sin(n+6))}{(3n+1)^2(n+2)}$, (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^3)}{x(\cos(5x-1))}$.

(a) (b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{\sqrt{x}-5}{x-5\sqrt{x}+4} \quad dx$.

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = x + \frac{\log(2x+1)}{\log(2x-1)}$.

4. (5 punti) Determinare gli insiemi di crescenza e decrescenza gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = 2x^2 - 6x - 4\log|x|$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' = y\sin x + \sin 2x$. Determinare poi la soluzione che soddisfa $y(0) = 1$.

6. (3 punti) Supponiamo di voler partecipare al seguente gioco: si estrae quattro volte una carta da un mazzo di 40 (ogni volta rimettendo la carta nel mazzo e rimescolando) e si vincono 100 Euro se abbiamo estratto almeno due cuori. (a) Determinare la probabilitá di vincere. (b) Qual è l'importo equo da pagare per partecipare al gioco?

7. (5 punti) Supponiamo che la tassa di iscrizione a una data università sia così scaglionato a seconda del reddito lordo dello studente (o della sua famiglia):

   1000 Euro per redditi fino a 15000 Euro

   2000 Euro per redditi da 15000 a 25000 Euro

   3000 Euro per redditi da 25000 a 35000 Euro

   4000 Euro per redditi oltre 35000 Euro

   Supponendo che il reddito di uno studente sia una variabile aleatoria normalmente distribuita con media 30000 Euro e deviazione standard 10000 Euro, calcolare (a) la probabilitá che uno studente paghi almeno 3000 Euro di tassa; (b) il valore atteso della tassa per un singolo studente.

8. (8 punti) **Primitive e Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

Soluzioni dei compiti del 15 Giugno 2010

Soluzioni dei COMPITI 1-3-5

1. $(a) = \frac{1}{4}$ $\qquad (b) = +\infty$.

2. $\log x = t$, $dx = xdt$ si ottiene:

$$\int \frac{dt}{t^2 - 5t + 6} = -\int \frac{1}{t-2} + \int \frac{1}{t-3} = ... = \log \frac{|t-3|}{|t-2|} + C$$

usando il procedimento per l'integrazione delle funzioni razionali.

3. f é definita $x > \frac{1}{4}$ si ha

$$\lim_{x \to (\frac{1}{4}^+} f(x) = -\infty$$

quindi ci sono due asintoti verticali.

Inoltre $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 1$. La retta $y = x + 1$ é un asintoto obliquo a $+\infty$.

4. f é definita per $x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$$

$f'(x) = 0$ in $x = 1$ (punto di max relativo) e $x = 2$ (punto di minimo relativo). f crescente in $(0, 1) \cup (2, +\infty)$, decresce in $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$. Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. La funzione non ha valore massimo e minimo.

5. Equazione di primo grado lineare:

$$y(x) = e^{\sqrt{x}}(\int e^{-\sqrt{x}} dx + C)$$

da altra parte, con la sostituzione $2\sqrt{x} = t$ si ha $x = \frac{t^2}{4}$ e $dx = \frac{t}{2} dt$ si ottiene per parti

$$\int e^{-2\sqrt{x}} dx = \int e^{-t} t dt = -te^{-t} - e^{-t} + C.$$

quindi

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{2\sqrt{x}} (-2\sqrt{x} e^{-2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}} + C) = -\sqrt{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} C e^{2\sqrt{x}}.$$

quindi il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$ é $-\infty$ quando $C \leq 0$.

6. (a) $X =$ numero di carte estratte per 3 prove

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

in questo caso $p = \frac{1}{4}$ e $n = 3$ quindi

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 0))$$

si ottiene (a) 0,1562 (b) Valore atteso della tassa per ogni singolo studente: 15,62

7. x= reddito dello studente e T= tasse da pagare.

$$P(T=500) = P(0 \leq x \leq 15000) = P(\frac{0-30000}{10000} \leq Z \leq \frac{15000-300000}{10000}$$

$$P(T=500) = P(-3 \leq Z \leq -1,5) = P(1,5 \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq 1.5) = ...$$

quindi (a) 1,31 (b) 1466.

Soluzioni dei COMPITI 2-4-6

1. $(a) = \frac{1}{9}$ $\qquad (b) = 0$.

2. $\sqrt{x} = t$, $dx = 2tdt$ si ottiene:

$$2\int \frac{t-5}{t^2-5t+4} 2tdt = 2\int \frac{t^2-5}{t^2-5t+4} = 2\int \frac{t^2-5t+4}{t^2-5t+4}dt - 8\int \frac{1}{t^2-5t+4} =$$

$$= 2t - 8(-\frac{1}{3}\log(\sqrt{x}-1) + \frac{1}{3}\log(\sqrt{x}-4) + C)$$

usando il procedimento per l'integrazione delle funzioni razionali.

3. f é definita $x > \frac{1}{2}$, si ha

$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} f(x) = 0$$

quindi non ci sono asintoti verticali.

Inoltre $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) - x = 1$. La retta $y = x + 1$ é un asintoto obbliquo. A $-\infty$ stesso andamento.

4. f é definita per $x \neq 0$ e inoltre:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 4x - 6 + \frac{4}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{4x^2-6x+4}{x}$$

si ha $f'(x) = 0$ in $x = 2$ e $x = -\frac{1}{2}$ (punti di min relativo) f crescente in $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (2, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2)$. Inoltre $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. La funzione non ha valore massimo e minimo.

5. Equazione di primo grado lineare:

$$y(x) = e^{-\cos x}(\int e^{\cos x} \sin 2x dx + C)$$

da altra parte $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ e la sostituzione $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$ si ottiene per parti

$$\int e^{\cos x} \sin 2x dx = -2(\cos x e^{\cos x} - e^{\cos x} + C)$$

quindi

$$y(x) = -2\cos x + 2 - 2Ce^{-\cos x}$$

quindi la soluzione tale che $y(0) = 1$, implica $y(0) = -2 + 2 - 2Ce^{-1} = 1$. $C = \frac{e}{2}$ e quindi $y(x) = e^{1-\cos x} + 2$.

6. Procedimento analogo ai compiti 1-3-5 e si ottiene (a)=0,2617 (b) 26,17

7. Procedimento analogo al compito 1-3-5 e si ottiene (a) 0,69 (b) 2933.