Matematica, 12 CFU

Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale-Corsi A e C

19 Febbraio 2010- **COMPITO 1-** Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \arctan(\frac{n\,(\log n)^2 - n}{e^n})$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{(\sin x)^3}-1}{x\,(\cos x - 1)}$.

(a)	(b)

Assegnata la funzione $f(x) = (3x+1)\, e^{\frac{1}{3x+1}}$.

2. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti:

3. (5 punti) Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

4. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{3\sin x \cos x}{4\sin x - (\cos x)^2 + 5}\ \ dx$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$. Determinare le soluzioni tali che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$.

6. (4 punti)Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ e che il suo valore atteso è 3, quanto vale $P(X = 0)$?

7. (4 punti) Una trappola per lupi scatta solo se l'animale che ci passa sopra pesa più di 40 Kg. Supponendo che il peso dei lupi sia normalmente distribuito con media 39 Kg e deviazione standard 2 Kg (e che sopra la trappola passino solo lupi) calcolare:
   (a) la probabilità che un lupo preso in trappola pesi più di 41 Kg;
   (b) la probabilità che sopra la trappola passino quattro lupi senza che questa scatti;
   (c) la probabilità che un lupo catturato sia il quinto lupo che è passato sopra la trappola.

8. (8 punti) **Teorema di Lagrange e caratterizzazione delle primitive**

Soluzioni

1. $(a) = 0 \qquad (b) = -2.$

2. Si consideri la funzione $f(x) = (3x+1)\, e^{\frac{1}{3x+1}}$. f é definita per $x \neq -\frac{1}{3}$ Calcoliamo i limiti in $-\frac{1}{3}$:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to(-\frac{1}{3})^-} f(x) = 0.$$

   la retta $x = -\frac{1}{3}$ é un asintoto verticale.
   Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

   Dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = 2$$

   la funzione ha un asintoto obbliquo $y = 3x + 2$.

3. Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = 3e^{\frac{1}{3x+1}}(1 - \frac{1}{3x+1}) = 9e^{\frac{1}{3x+1}}(\frac{x}{3x+1})$$

   La funzione é crescente per $x < -\frac{1}{3}$, decrescente $-\frac{1}{3} < x < 0$ e di nuovo crescente per $x > 0$. $x = 0$ é un punto di minimo relativo. La funzione non ha valore massimo.

4. L'integrale si risolve per sostituzione $\sin x = t$ e quindi $\cos x dx = dt$, quindi:

$$\int \frac{3\sin x \cos x}{4\sin x - (\cos x)^2 + 5} \quad dx = \int \frac{3t}{t^2 + 4t + 4} \quad dt,$$

   dal momento che $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$. quindi usando il metodo di integrazione delle funzioni razionali:

$$\int \frac{3t}{t^2 - 4t + 4} \quad dt = \int \frac{A}{t+2} \quad dt + \int \frac{B}{(t+2)^2} \quad dt = 3\log|t+2| + \frac{6}{t+2} + C$$

5. Equazione di secondo grado a coefficienti costanti. Si deve risolvere $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, e quindi le soluzioni dell'omogenea: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$.
   Una soluzione particolare della forma $\bar{y} = ax + b$ e quindi si ha $a = 1$ e $b = 2$.
   La soluzione $y(x) = -e^{2x} + 2e^x + x + 2$ é l'unica tale che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$.

Matematica, 12 CFU

Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

19 Febbraio 2010- **COMPITO 2-** Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \arctan 3n}{3(n^3+1)}$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\ \sin(e^x-1)}{1-\cos x}$.

(a)	(b)

Assegnata la funzione $f(x) = \frac{(x-1)^{\frac{1}{4}}}{\log(x-1)}$.

2. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti.

3. (5 punti)Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

4. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{(2\cos x-1)\sin x}{10-(\sin x)^2} \quad dx$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' - \frac{1}{2}y = \frac{e^x}{4y\sqrt{x}}$. Quante soluzioni soddisfano la condizione $y(0) = 4$.

6. (4 punti) Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori $\{2, 4, 6, 8\}$ e che il suo valore atteso è 4, quanto vale $P(X = 0)$?

un punto

7. Una trappola per lupi scatta solo se l'animale che ci passa sopra pesa più di 40 Kg. Supponendo che il peso dei lupi sia normalmente distribuito con media 39 Kg e deviazione standard 3 Kg (e che sopra la trappola passino solo lupi), calcolare:

   (a) la probabilità che un lupo preso in trappola pesi meno di 42 Kg;
   (b) la probabilità che sopra la trappola passino quattro lupi senza che questa scatti;
   (c) la probabilità che un lupo catturato sia il quinto lupo che è passato sopra la trappola.

8. (8 punti) **Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat**

Soluzioni

1. $(a) = \frac{\pi}{6}$ $\qquad (b) = 2.$

2. Si consideri la funzione $\quad f(x) = \frac{(x-1)^{\frac{1}{4}}}{\log(x-1)}$, f é definita per $x > 1$ e $x \neq 2$. Calcoliamo i limiti in 2:

$$\lim_{x \to (2)^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to (2)^-} f(x) = -\infty.$$

   la retta $x = 2$ é un asintoto verticale.

   Dal momento che $\lim_{x \to (1)^+} f(x) = 0$, $x = 1$ punto di singolaritá eliminabile.

   Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

   quindi la funzione non ha asintoti obbliqui.

3. Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^{\frac{1}{4}-1}}{(\log(x-1))^2}(\frac{1}{4}\log(x-1) - 1)$$

   $f'(x) = 0$ per $x = 1 + e^4$, la funzione é crescente per $x > 1 + e^4$ ed é decrescente per $1 < x < 2$. $2 < x < 1 + e^4$. Il punto $x = 1 + e^4$ é di minimo relativo. La funzione non ha valore massimo.

4. L'integrale si risolve per sostituzione $\cos x = t$ e quindi $-\sin x dx = dt$, dal momento che $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$, quindi:

$$\int \frac{(2\cos x - 1)\sin x}{10 - (\sin x)^2} \quad dx = -\int \frac{2t - 1}{t^2 + 9} \quad dt$$

   usando il metodo di integrazione delle funzioni razionali:

$$\int \frac{2t - 1}{t^2 + 9} \quad dt = \log(t^2 + 9) + \frac{1}{3}\arctan(\frac{t}{3}) + C$$

5. Si tratta di un equazione di Bernoulli: $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$. L'equazione diventa:

$$z' = z + \frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{x}} \Rightarrow z(x) = e^x(\sqrt{x} + C)$$

   Quindi : $y(x) = \sqrt{e^x(\sqrt{x} + C)}$. La soluzione con $C = 16$ soddisfa $y(0) = 4$.

Matematica, 12 CFU- CdL in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

19 Febbraio 2010- **COMPITO 3**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: $(a)\quad \lim_{n\to\infty} \arctan(\frac{e^n+n}{(\log n)^3})$, $\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{(e^x-1)(\tan x)^3}$.

(a)	(b)

Assegnata la funzione $\quad f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}}\ \log(2x-1)$.

2. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti:

3. (5 punti) Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

4. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{(2(\sin x)^2-1)\ \cos x}{-(\cos x)^2-3} \quad dx$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' = \frac{y}{x} - e^x y^2$. Esistono soluzioni tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$? .

6. (4 punti) Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 3, 6, 9, 12\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori $\{3, 6, 9, 12\}$ e che il suo valore atteso è 4.5, quanto vale $P(X = 0)$?

7. (4 punti) Una trappola per lupi scatta solo se l'animale che ci passa sopra pesa più di 40 Kg.Supponendo che il peso dei lupi sia normalmente distribuito con media 39 Kg e deviazione standard 2 Kg (e che sopra la trappola passino solo lupi) calcolare:

   (a) la probabilità che un lupo preso in trappola pesi più di 41 Kg;

   (b) la probabilità che sopra la trappola passino tre lupi senza che questa scatti;

   (c) la probabilità che un lupo catturato sia il quarto lupo che è passato sopra la trappola.

8. (8 punti) **Definizione di limite di una successione e Teorema di Unicità.**

Soluzioni

1. $(a) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad (b) = \frac{1}{2}$.

2. Si consideri la funzione $\quad f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}}\, \log(2x-1)$, f é definita per $x > \frac{1}{2}$. Calcoliamo il limiti in $\frac{1}{2}$:
$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} f(x) = 0.$$
Il punto $x = \frac{1}{2}$ é un di singolaritá eliminabile.
Inoltre:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$
quindi la funzione non ha asintoti obbliqui.

3. Calcoliamo la derivata di f:
$$f'(x) = 2(2x-1)^{\frac{1}{3}-1}(\frac{1}{3}\log(2x-1)+1),$$
$f'(x) = 0$ per $x = \frac{1}{2}(e^{-3}+1)$, la funzione é decrescente per $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}(e^{-3}+1)$ ed é crescente per $x > \frac{1}{2}(e^{-3}+1)$. Il punto $x = \frac{1}{2}(e^{-3}+1)$ é di minimo assoluto. La funzione non ha valore massimo.

4. L'integrale si risolve per sostituzione $\sin x = t$ e quindi $\cos x dx = dt$, dal momento che $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$, quindi:
$$\int \frac{(2(\sin x)^2 - 1)\,\cos x}{-(\cos x)^2 - 3} \quad dx = \int \frac{2t^2-1}{t^2-4} \quad dt$$
quindi usando il metodo di integrazione delle funzioni razionali:
$$\int \frac{2t^2-1}{t^2-4} \quad dt = 2t + \frac{7}{4}\log|t+2| + \frac{7}{4}\log|t-2| + C$$

5. Si tratta di un equazione di Bernoulli: $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$. L'equazione diventa:
$$z' = -\frac{1}{x}z + e^x \Rightarrow z(x) = e^{-\log x}(\int xe^x + C) = \frac{1}{x}(e^x(x-1)+C).$$
Quindi : $y(x) = \frac{x}{e^x(x-1)+C}$. Tulle le soluzioni soddisfano la condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Matematica, 12 CFU

Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

19 Febbraio 2010- **COMPITO 4-** Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: $(a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \arctan 3n}{5n^3+n^2+8n}$, $\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\sin x)^2)}{x\,(e^{3x}-1)}$.

(a)	(b)

Assegnata la funzione $\quad f(x) = \frac{\log(x+1)}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$.

2. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti:

3. (5 punti) Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

4. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{(3\sin x+1)\cos x}{7-(\cos x)^2-5\sin x} \quad dx$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y'(1+e^{2x}) = y^{\frac{1}{5}}e^{2x}$. Quante soluzioni soddisfano $y(0) = 2$? .

6. (4 punti) Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 4, 8, 12, 16\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori $\{4, 8, 12, 16\}$ e che il suo valore atteso è 2.5, quanto vale $P(X = 0)$?

7. (4 punti) Una trappola per lupi scatta solo se l'animale che ci passa sopra pesa più di 40 Kg. Supponendo che il peso dei lupi sia normalmente distribuito con media 39 Kg e deviazione standard 3 Kg (e che sopra la trappola passino solo lupi), calcolare:

   (a) la probabilità che un lupo preso in trappola pesi meno di 42 Kg;

   (b) la probabilità che sopra la trappola passino tre lupi senza che questa scatti;

   (c) la probabilità che un lupo catturato sia il quarto lupo che è passato sopra la trappola.

8. (8 punti) **Teorema dei valori intermedi e Teorema della Media Integrale**

Soluzioni

1. $(a) = \frac{\pi}{10}$ $\qquad (b) = \frac{1}{3}$.

2. Si consideri la funzione $\quad f(x) = \frac{\log(x+1)}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$, f é definita per $x > -1$, $f(0) = 0$. Calcoliamo il limite in -1

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty.$$

La retta $x = -1$ é un asintoto per il grafico di F.

Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale all'infinito.

3. Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{\frac{4}{3}}} \quad (3 - \log(x+1)),$$

$f'(x) = 0$ per $x = e^3 - 1$, la funzione é crescente per $x < e^3 + 1$ ed é decrescente per $x > e^3 + 1$. Il punto $x = e^3 - 1$ é di massimo assoluto. La funzione non ha valore minimo.

4. L'integrale si risolve per sostituzione $\sin x = t$ e quindi $\cos x dx = dt$, dal momento che $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$, quindi:

$$\int \frac{(3 \sin x + 1) \cos x}{7 - (\cos x)^2 - 5 \sin x} \quad dx = \int \frac{3t+1}{t^2 - 5t + 6} \quad dt,$$

quindi usando il metodo di integrazione delle funzioni razionali:

$$\int \frac{3t+1}{t^2 - 5t + 6} \quad dt = 10 \log|t-3| - 7 \log|t-2| + C$$

5. Equazione differenziale a variabili separate:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{5}}} = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} \Rightarrow \frac{5}{4} y^{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}(\log(1 + e^{2x})) + C \Rightarrow y(x) = (\frac{2}{5}(\log(1 + e^{2x}) + \frac{4}{5} C)^{\frac{5}{4}}$$

per $C = 2^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{2} \log 2$ la soluzione soddisfa la condizione $y(0) = 2$.

Svolgiamo a titolo d'esempio gli esercizi della fila 1. Gli altri si fanno in modo analogo.

Primo esercizio.
Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ e che il suo valore atteso è 3, quanto vale $P(X = 0)$?

Svolgimento. Detta p la probabilità comune dei valori $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, dalla definizione di valore atteso per una variabile aleatoria discreta si ottiene la condizione

$$2p + 4p + 6p + 8p + 10p = 3$$

e dunque

$$p = \frac{3}{2 + 4 + 6 + 8 + 10} = \frac{1}{10}.$$

Pertanto

$$P(X = 0) = 1 - (P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10))$$

$$= 1 - 5p = \frac{1}{2}.$$

Secondo esercizio.
Una trappola per lupi scatta solo se l'animale che ci passa sopra pesa più di 40 Kg. Supponendo che il peso dei lupi sia normalmente distribuito con media 39 Kg e deviazione standard 2 Kg (e che sopra la trappola passino solo lupi) calcolare:

1. la probabilità che un lupo preso in trappola pesi più di 41 Kg;
2. la probabilità che sopra la trappola passino quattro lupi senza che questa scatti;
3. la probabilità che un lupo catturato sia il quinto lupo che è passato sopra la trappola.

Svolgimento. 1. Sia $X \sim \mathcal{N}(39, 2^2)$ la variabile aleatoria "peso del lupo". La probabilità che un lupo pesi più di 41 Kg sapendo che è stato preso in trappola (e dunque sapendo che pesa più di 40 Kg) è data dalla probabilità condizionata

$$P(X \geq 41 \mid X \geq 40) = \frac{P((X \geq 41) \cap (X \geq 40))}{P(X \geq 40)} = \frac{P(X \geq 41)}{P(X \geq 40)}.$$

Standardizzando si ottiene

$$\frac{P(X \geq 41)}{P(X \geq 40)} = \frac{P(Z \geq 1)}{P(Z \geq 1/2)} \approx 0.52.$$

2. La probabilità che sopra la trappola passino quattro lupi senza che questa scatti è la probabilità di 4 insuccessi insuccesso in 4 prove bernoulliane con probabilità di successo $p = P(X \geq 40) = P(Z \geq 1/2) \approx 0.31$ ed è dunque data da

$$(1 - 0.31)^4 = (0.69)^4 \approx 0.23.$$

3. Se il primo lupo catturato è il quinto che passa sulla trappola, significa che ci sono stati 4 insuccessi nelle prime quattro prove e un successo alla quinta prova e dunque la probabilità è data da

$$(0.69)^4 \times 0.31 \approx 0.07.$$

NOTA BENE: il secondo quesito poteva essere leggermente ambiguo e poteva far pensare a 4 lupi che passano *contemporaneamente* sulla trappola (!). In questo caso la trappola scatta se il peso complessivo dei 4 lupi supera i 40 Kg. Tale peso complessivo è una variabile normale Y con media $4 \times 40 = 160\,\mathrm{Kg}$ e varianza $4 \times 2^2 = 16\,\mathrm{Kg}^2$. Dunque la probabilità che la trappola non scatti con quattro lupi che ci passano sopra contemporaneamente è

$$P(Y < 40) = P(Z < \tfrac{40-120}{\sqrt{16}}) = P(Z < -20) \approx 0.$$

Abbiamo considerato valido anche l'esercizio svolto in questo modo.