Analisi Matematica I e II modulo
Soluzioni prova scritta n. 5

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

13 febbraio 2006

1. Dimostrare che
$$(n^2)! \geq (n!)^2$$
per ogni numero naturale n.

   Soluzione. Utilizziamo il principio di induzione. Per $n = 1$ l'affermazione in questione diventa $1 \geq 1$ che è vera. Supponiamo ora che l'affermazione sia valida per un certo n. Per $n + 1$ si ha
$$\begin{aligned}(n+1)^2! &= (n+1)^2\,[((n+1)^2-1)!] \geq (n+1)^2[n^2!] \overset{\text{hyp}}{\geq} (n+1)^2(n!^2)\\ &= [(n+1)(n!)]^2 = [(n+1)!]^2\end{aligned}$$
come volevamo dimostrare.

2. Al variare del parametro α determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$\log(1+x) = \alpha x.$$

   Soluzione Si tratta di determinare il numero di intersezioni tra il grafico della funzione $f(x) = \log(1 + x)$ e la retta $y = \alpha x$. Osserviamo che la funzione f è strettamente crescente e strettamente concava, ha un asintoto verticale $x = -1$ e tende all'infinito per $x \to +\infty$ meno velocemente di qualunque retta. Osserviamo anche che per $\alpha = 1$ la retta $y = \alpha x$ è proprio la retta tangente al grafico di f. Osserviamo anche che qualunque sia α le due curve si intersecano per $x = 0$.

   Dunque possiamo concludere che:

   (a) per $\alpha \leq 0$ la retta è il grafico di una funzione decrescente mentre f è strettamente crescente, quindi oltre alla soluzione $x_1 = 0$ non ci possono essere altre soluzioni;

   (b) per $\alpha \in (0, 1)$ oltre alla soluzione $x_1 = 0$ ci deve essere una soluzione $x_2 \in (-1, 0)$ ma non ci possono essere più di due soluzioni in quanto f è una funzione strettamente concava;

   (c) per $\alpha = 1$ la retta è tangente ad una funzione strettamente concava e quindi c'è una sola soluzione $x_1 = 0$;

   (d) per $\alpha > 1$ oltre alla soluzione $x_1 = 0$ ci deve essere una soluzione $x_2 > 0$ (retta secante) ma non ci possono essere altre soluzioni.

3. Determinare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt[k]{2006} - 1}}.$$

Suggerimento: utilizzare la formula di Taylor $e^{\frac{a}{k}} = 1 + \frac{a}{k} + o(\frac{1}{k})$.

Soluzione Osserviamo che si ha

$$\sqrt[k]{\sqrt[k]{2006} - 1} = e^{\frac{1}{k}\log(e^{\frac{\log 2006}{k}} - 1)} = e^{\frac{1}{k}\log(1 + \frac{\log 2006}{k} + o(1/k) - 1)} = e^{\frac{\log(\frac{\log 2006}{k} + o(1/k))}{k}} \to 1 \qquad k \to \infty$$

cioè il termine generico della serie non è infinitesimo e di conseguenza la serie diverge.

4. Trovare una primitiva della funzione

$$\frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}.$$

Soluzione. Posto $y = \tan x$ si ha $dy = 1 + \tan^2 x\, dx$ e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}\, dx &= \int \frac{1}{1 - y^2}\, dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y}\, dy \\ &= \frac{1}{2}[\log(1 + y) - \log(1 - y)] = \frac{1}{2}\log\frac{1 + y}{1 - y} = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}.\end{aligned}$$