

# Analisi Matematica Due

## Soluzioni della prova scritta n. 5

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

12 settembre 2002

1. Dire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua, derivabile e differenziabile nel punto  $(0, 0)$ .

*Soluzione.* Notiamo qualitativamente, che il numeratore della frazione che definisce la funzione  $f$  cresce come una potenza 2 mentre al denominatore abbiamo una potenza  $2/3$ . Essendo  $2 > 1 + 2/3$  ci aspettiamo che la funzione sia differenziabile nell'origine (e quindi anche derivabile e continua) con differenziale nullo.

Per provare che la funzione  $f$  è differenziabile con differenziale nullo sarà sufficiente provare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Per  $(x, y) \neq (0, 0)$  si ha (ricordando che  $|\sin x| \leq |x|$ )

$$\left| \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{\sin^2 x + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{6}}} \leq \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{6}}} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{6}}.$$

Per verifica diretta questa disuguaglianza risulta valida anche per  $(x, y) = (0, 0)$  e dunque essendo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{6}} = 0$  si ottiene, per confronto, il risultato cercato.

2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{3 + |x|^n}.$$

Studiarne la convergenza puntuale e determinare gli intervalli su cui si ha convergenza uniforme.

*Soluzione.* Consideriamo innanzitutto la convergenza puntuale. Per  $x = 0$  si ha chiaramente  $f_n(0) = 0$ . Per  $|x| < 1$ ,  $x \neq 0$  si ha  $|x|^n \rightarrow 0$  e quindi  $f_n(x) \rightarrow \infty$ . Per  $|x| = 1$  si ottiene di nuovo  $f_n(x) \rightarrow \infty$ . Infine per  $|x| > 1$  si ha  $|f_n(x)| \leq |x|^2 \frac{n}{|x|^n} \rightarrow 0$ . Dunque la successione di funzioni converge puntualmente solo sull'insieme  $\{|x| > 1\} \cup \{0\}$  dove ha come limite puntuale la funzione nulla.

Facciamo ora un rapido studio delle funzioni  $f_n(x)$ . Notiamo innanzitutto che  $f_n$  è pari e dunque sarà sufficiente studiare la funzione per  $x \geq 0$ .

Si ha  $f_n(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ . Inoltre dallo studio della derivata prima

$$f'_n(x) = \frac{6nx - (n^2 - 2n)x^{n+1}}{(3 + x^n)^2} \quad (x \geq 0)$$

(che si annulla nel punto  $x_n = 6/(n - 2)$ ) deduciamo che la funzione è crescente per  $x \in [0, x_n]$ , ha un massimo assoluto in  $x_n$  ed è quindi decrescente per  $x \geq x_n$ . Sicuramente la convergenza uniforme non ci può essere in nessun intervallo che interseca l'intervallo  $[-1, 1]$  in quanto per  $|x| \leq 1$  non si ha neppure convergenza puntuale.

Prendiamo dunque in considerazione un intervallo del tipo  $[\alpha, \infty[$  con  $\alpha > 1$ . Su questo intervallo si ha convergenza uniforme in quanto essendo la funzione decrescente si ha  $|f_n(x)| \leq f_n(\alpha) \rightarrow 0$  per ogni  $x \in [\alpha, \infty[$ . Lo stesso vale per gli intervalli del tipo  $] -\infty, \alpha]$  con  $\alpha < -1$ . Dunque in ogni intervallo chiuso contenuto in  $\{|x| > 1\}$  si ha convergenza uniforme.

Per concludere verificiamo che non c'è convergenza puntuale sugli intervalli aperti del tipo  $]1, \alpha[$  qualunque sia  $\alpha > 1$ . Infatti essendo  $f_n(1) \rightarrow_n \infty$  data una qualunque funzione  $f_n$  è possibile trovare un punto  $x_n$  sufficientemente vicino a 1 e tale che  $f_n(x_n) \rightarrow \infty$ .

3. Trovare tutte le soluzioni di classe  $C^2$  dell'equazione differenziale

$$y = xy' + y' \arctan(y') - \frac{1}{2} \log(1 + (y')^2).$$

*Soluzione.* Deriviamo entrambi i membri dell'equazione differenziale data ottenendo la seguente equazione del secondo ordine

$$y' = y' + xy'' + y'' \arctan y' + y' \frac{y''}{1 + y'^2} - \frac{1}{2} \frac{2y'y''}{1 + y'^2}$$

che semplificata diviene

$$(x + \arctan y')y'' = 0.$$

Questa equazione può essere spezzata nelle due equazioni  $y'' = 0$  e  $x + \arctan y' = 0$ . L'equazione  $y'' = 0$  ha come soluzione tutte le rette  $y = mx + q$ . Dobbiamo però ricordarci che le soluzioni dell'equazione ottenuta

per derivazione possono differire dalle soluzioni dell'equazione originaria per una costante. Dunque imponiamo anche la condizione

$$y(0) = y'(0) \arctan y'(0) - \frac{1}{2} \log(1 + y'(0)^2) \quad (1)$$

(ottenuta sostituendo  $x = 0$  nell'equazione differenziale originaria) ottenendo  $q = m \arctan m - \frac{1}{2} \log(1 + m^2)$ . Abbiamo dunque provato che il fascio di rette

$$y = mx + m \arctan m - \frac{1}{2} \log(1 + m^2)$$

è soluzione dell'equazione data.

Consideriamo ora l'equazione  $x + \arctan y' = 0$  che può essere riscritta come  $x = -\arctan y'$ . Si vede dunque che necessariamente  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . In questo intervallo l'equazione è equivalente a  $y' = -\tan x$  che può essere risolta facilmente per integrazione ottenendo  $y(x) = -\log \cos x + c$ . Anche in questo caso applicando (1) si ottiene  $c = 0$  e dunque la soluzione "singolare" dell'equazione differenziale data è

$$y = -\log \cos x \quad (x \in ]-\pi/2, \pi/2[).$$

Si può infine verificare che le rette del fascio sono tangenti alla soluzione singolare trovata.

4. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} 2y \cos x \, ds$$

sulla curva  $\gamma(t) = (t, \sin t)$  per  $t \in [0, \pi]$ .

*Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} 2y \cos x \, ds &= \int_0^{\pi} 2 \sin t \cos t \sqrt{1 + \cos^2 t} \, dt \\ &= \int_0^{\pi} -(1 + \cos^2 t)' (1 + \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} \, dt \\ &= \left[ -\frac{2}{3} (1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

*Revisioni.*

11 aprile 2003: corretta la soluzione dell'ultimo esercizio.