Analisi Matematica Due
Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

30 maggio 2002

1. Si consideri la successione di funzioni $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_k(x) = e^{-kx^2} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$$
e la serie associata $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.
   (a) Mostrare che la successione e la serie convergono puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$;
   (b) verificare che la successione converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ ma la serie non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$;
   (c) verificare che la serie converge totalmente su ogni insieme del tipo $I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$.
2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) = \sqrt{|\sin x|} + \cos(x + y).$$
Dimostrare che f ammette massimo e minimo su tutto $\mathbb{R}^2$; determinare i punti di massimo e minimo relativo e assoluto.
3. Determinare il volume del solido
$$C = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3 + 2\sqrt{x^2 + 2y^2} - x^2 - 2y^2\}.$$
4. Posto
$$\omega = \frac{2x + y}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y - x}{x^2 + y^2}dy, \qquad \gamma(t) = (t(25t^2 - 16), 9 - 18t^2), \quad t \in [-1, 1]$$
calcolare $\int_\gamma \omega$.