Compito di Analisi Matematica 2

14 gennaio 2020

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Calcolare il volume e la superficie del solido

$$E := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - 2y \le 0\,, \quad 0 \le z \le 20 - 9\sqrt{x^2 + y^2}\Big\}\,.$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4 - \sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) Studiare la continuità e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.
(2) Mostrare che l'equazione $f(x,y) = 1$ definisce implicitamente una funzione $y = h(x)$, in un intorno del punto $(0,1)$.

Esercizio 3. Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ una soluzione non identicamente nulla dell'equazione differenziale $y'' = f(y)$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziana. Mostrare che l'insieme degli zeri $\{x \in \mathbb{R} : \ y(x) = 0\}$ non ha punti di accumulazione in $\mathbb{R}$.

SOLUZIONI

Soluzione Esercizio 1.

Poniamo
$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\},$$
che in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ diventa
$$A = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \,:\, \rho^2 - 2\rho\sin\theta \leq 0\} = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \,:\, \rho \leq 2\sin\theta\}.$$
Usando il cambio di variabili $(x, y) \mapsto (\rho, \theta)$ si ottiene
$$|A| \;=\; \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho \,\mathrm{d}\rho = \int_0^\pi 2\sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \pi.$$
Usando il teorema di Fubini e ancora una volta le coordinate polari, si ha
$$\begin{aligned} |E| &= \int_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{20-9\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z \\ &= 20|A| - 9\int_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 20\pi - 9\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \\ &= 20\pi - 24\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = 20\pi - 32, \end{aligned}$$
dove l'ultima uguaglianza segue dall'integrazione per parti
$$\int \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = -\sin^2\theta\cos\theta + \int (2\sin\theta\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\sin^2\theta\cos\theta - \frac{2}{3}\cos^3\theta.$$

Calcoliamo ora la superficie di E. Il bordo di E è composto da tre pezzi:
$$S_1 := A\times\{0\}, \quad S_2 := \left\{(x, y, z) \,:\, (x, y) \in A,\ z = 20 - 9\sqrt{x^2+y^2}\right\}, \quad S_3 := \partial E\cap(\partial A\times\mathbb{R}).$$
Possiamo quindi calcolare $|S_1| = |A| = \pi$ e
$$|S_2| = \int_A \sqrt{1 + \left|\nabla(20 - 9\sqrt{x^2+y^2})\right|^2}\,dxdy = \int_A \sqrt{82}\,dxdy = \sqrt{82}\,\pi.$$
Per calcolare la superficie di S_3 osserviamo che $C_h := S_3 \cap \{z = h\} \subset \partial A \times \{h\}$ è un arco di cerchio di lunghezza $|C_h| = 4\arcsin((20-h)/18)$ per $h \geq 2$ e $|C_h| = 2\pi$ per $h \in [0, 2]$. Ponendo $h' = (20-h)/18$, abbiamo quindi
$$\begin{aligned} |S_3| &= 4\pi + \int_2^{20} |C_h|\,dh = 4\pi + 4\int_2^{20} \arcsin((20-h)/18)\,dh \\ &= 4\pi + 72\int_0^1 \arcsin(h')\,dh' = 40\pi - 72. \end{aligned}$$
Sommando i tre contributi otteniamo infine $|\partial E| = (41 + \sqrt{82})\pi - 72$.

Soluzione Esercizio 2.

(1) Osserviamo subito che f è continua e differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Notiamo inoltre che

$$f(x,y) \leq \frac{x^4+y^4+2x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2,$$

da cui segue che f è continua e differenziabile anche nel punto $(0,0)$ e si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(2) Osserviamo che l'equazione $f(x,y) = 1$ si può riscrivere come

$$g(x,y) := x^4 + y^4 - \sin(x^2y^2) - x^2 - y^2 = 0$$

e che il punto $(0,1)$ è soluzione dell'equazione $g(x,y) = 0$. Notiamo inoltre che

$$\frac{d}{dy}g(x,y) = 4y^3 - 2x^2y\cos(x^2y^2) - 2y \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{d}{dy}g(0,1) = 2 \neq 0.$$

Per il Teorema del Dini esiste $\varepsilon > 0$ ed un'unica funzione $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tale che $y = h(x)$ se e solo se $g(x, h(x)) = 0$.

Soluzione Esercizio 3.

Supponiamo per assurdo che esista $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \to \bar{x}$ per qualche successione $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ che verifica $y(x_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dal momento che $y \in C^2(\mathbb{R})$, abbiamo che $y(\bar{x}) = 0$. Inoltre, per il teorema di Lagrange, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste sempre un punto ξ_n nell'intervallo di estremi x_n, $\bar{x}$ tale che $y'(\xi_n) = 0$. Per costruzione, $\xi_n \to \bar{x}$ quando $n \to +\infty$, che insieme alla regolarità di y implica che $y'(\bar{x}) = 0$. Usando ancora una volta il teorema di Lagrange, si ottiene anche che $y''(\bar{x}) = 0$, che implica anche che $f(0) = 0$.

In conclusione, la funzione $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = f(y) \\ y(\bar{x}) = y'(\bar{x}) = 0, \end{cases}$$

ma anche la funzione identicamente nulla $y_0(x) \equiv 0$ è soluzione dello stesso problema, contraddicendo il teorema di esistenza e unicità locale.