Compito di Analisi Matematica 2
10 settembre 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Si consideri la superficie
$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ |x| + |y| + |z| = 1\}.$$

(1) Determinare i punti regolari ed i punti singolari di S.
(2) Calcolare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ ristretta alla superficie S.
(3) Calcolare il flusso del campo di vettori $v(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ attraverso la superficie S.

Soluzione:

(1) La funzione $g(x, y, z) = |x|+|y|+|z|$ è lineare a tratti e coerciva, pertanto l'insieme $S = \{g = 1\}$ è un poliedro. Più precisamente S è un ottaedro le cui facce sono triangoli equilateri contenute negli ottanti di $\mathbb{R}^3$. L'insieme dei punti singolari di S coincide quindi con l'insieme $S \cap \{xyz = 0\}$ degli spigoli e dei vertici di S.

(2) Osserviamo che f ammette sempre massimi e minimi su S, essendo una funzione continua ristretta a un insieme compatto.

Per simmetria è sufficiente considerare la funzione f ristretta alla faccia F di S contenuta nel primo ottante di $\mathbb{R}^3$: $F = \{x + y + z = 1\} \cap \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\} \cap \{z \geq 0\}$. Per il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange eventuali massimi e minimi di f verificano la condizione $\nabla f = (\lambda, \lambda, \lambda)$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, oppure sono contenuti nel bordo di F. Nel primo caso si ha $x = y = z = 1/3$, con $f(x, y, z) = 1/27$. Nel secondo caso, considerando la restrizione di f al bordo di F, si ha che i massimi e i minimi sono i vertici della faccia $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, su cui f vale 1, e i punti medi dei lati di bordo $(1/2, 1/2, 0)$, $(0, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 0, 1/2)$, su cui f vale $1/8$.

In conclusione il massimo di f su S è 1 ed è assunto nei vertici di S, mentre il minimo è $1/27$ ed è assunto nei baricentri delle facce, dati dalla condizione $|x| = |y| = |z| = 1/3$.

(3) Sia $A := \{|x| + |y| + |z| < 1\}$. Per il Teorema della divergenza il flusso di v attraverso S è dato dall'integrale
$$\int_A \mathrm{div} v(x, y, z)\, dxdydz = 2 \int_A (x + y + z)\, dxdydz = 0,$$
dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le simmetrie di A.

Esercizio 2. Siano $a, b \in C^1([0,1])$ e $c, f \in C([0,1])$. Assumiamo che esista $\lambda > 0$ tale che $a(x) \geq \lambda > 0$ per ogni $x \in [0,1]$. Sia $u \in C^2([0,1])$ una soluzione del problema

$$\begin{cases} (a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(1) Mostrare che esiste una costante $C > 0$, dipendente solo dalle funzioni a, b, c, tale che $\|u'\|^2_{L^2} \leq C(\|u\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2})$.
(2) Mostrare con un esempio che il problema può avere più di una soluzione.
(3) Supponiamo che $b(x) = f(x) = 0$ e $c(x) < 0$ per ogni $x \in (0,1)$. Mostrare che in questo caso il problema ha solo la soluzione nulla $u(x) = 0$.

Soluzione:

(1) Moltiplicando l'equazione differenziale per u e integrando nell'intervallo $(0,1)$ si ha

$$-\int_0^1 (a(x)u'(x))'u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 b(x)u'(x)u(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 c(x)u^2(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x,$$

da cui, integrando per parti e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, otteniamo

$$\begin{aligned}\lambda\|u'\|^2_{L^2} \leq \int_0^1 a(x)[u'(x)]^2\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 b'(x)\frac{u^2(x)}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 c(x)u^2(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} |b'(x)|\|u\|^2_{L^2} + \max_{x\in[0,1]} |c(x)|\|u\|^2_{L^2} + \frac{\|u\|^2_{L^2}}{2} + \frac{\|f\|^2_{L^2}}{2}\,.\end{aligned}$$

(2) Supponiamo $a(x) = 1$, $f(x) = b(x) = 0$ e $c(x) = \pi^2$ per ogni $x \in [0,1]$. Si vede che il problema

$$\begin{cases} u''(x) + \pi^2 u(x) = 0 & \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ammette la soluzione nulla $u_1(x) = 0$ e la soluzione positiva $u_2(x) = \sin(\pi x)$.

(3) Moltiplicando per u e integrando per parti come nel punto (1) abbiamo che

$$\begin{aligned}0 \leq \lambda\int_0^1 |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^1 a(x)|u'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 (a(x)u'(x))'u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 c(x)u^2(x)\mathrm{d}x \leq 0,\end{aligned}$$

da cui otteniamo che tutte le disuguaglianze sopra sono in realtà delle uguaglianze. Poiché tali uguaglianze sono soddisfatte se e solo se $u(x) = u'(x) = 0$ per ogni $x \in (0,1)$, abbiamo che l'unica soluzione del problema è la funzione costantemente nulla.