Secondo compitino di Analisi Matematica 1

22 maggio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice e assoluta dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty x^\alpha \sin(x^\beta)\,dx.$$

Soluzione.

Osserviamo che se $\beta = 0$ l'integrale si riduce a $\int_0^\infty x^\alpha\,dx$, che non converge per nessun valore di α.

Se $\beta \neq 0$, ponendo $\gamma = (\alpha + 1 - \beta)/\beta$, mediante il cambio di variabile $y = x^\beta$ l'integrale si riduce a

$$\frac{1}{|\beta|}\int_0^\infty y^\gamma \sin(y)\,dx.$$

Ricordando che $\sin(y) \sim y$ per $y \to 0$, si ha la convergenza, semplice e assoluta dell'integrale in un intorno di $y = 0$ se e solo se $\gamma + 1 > -1$, o equivalentemente $\alpha + 1 > -\beta$.

Per quanto riguarda la convergenza in un intorno di ∞, si ha la convergenza semplice dell'integrale se e solo se $\gamma < 0$, cioè $\alpha + 1 < \beta$. Si ha invece la convergenza assoluta se e solo se $\gamma < -1$, cioè $\alpha + 1 < 0$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{se } x \in [0, 1/4) \\ 1/2 & \text{se } x \in [1/4, 3/4) \\ 2 - 2x & \text{se } x \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

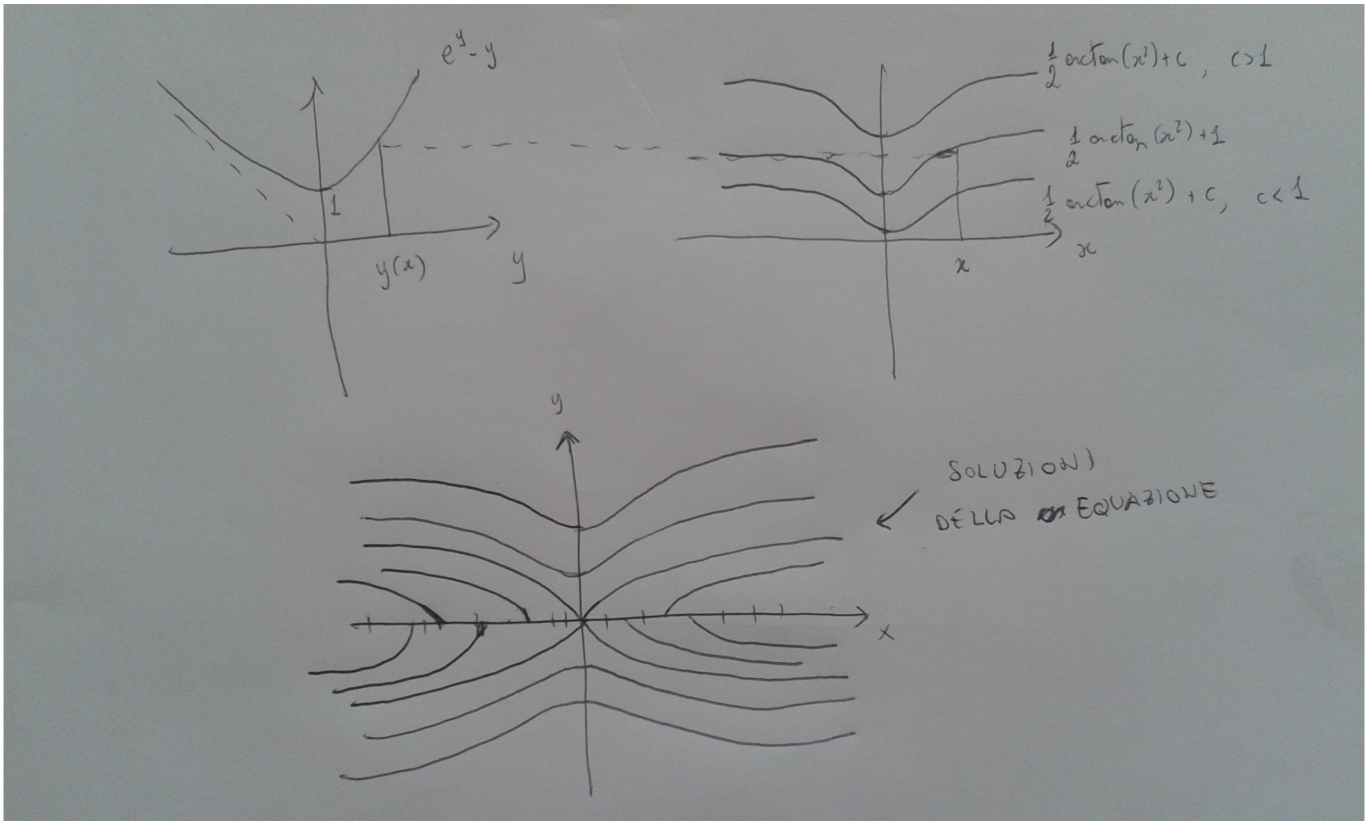
Studiare il comportamento della successione per ricorrenza $a_{n+1} = f(a_n)$, al variare di $a_0 \in [0, 1]$.

Soluzione.

Osserviamo che $f(x) = x$ se e solo se $x = 1/2$, quindi $x = 1/2$ è l'unico punto fisso della ricorrenza.

Inoltre, si verifica facilmente che $f^k(x) = 1/2$ se e solo se $x \in [2^{-(k+1)}, 1 - 2^{-(k+1)}]$, pertanto se $a_0 \in (0, 1)$ allora $a_n = 1/2$ per n sufficientemente grande.

Infine, poiché $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$, i punti $\{0, 1\}$ generano un'orbita periodica repulsiva per la ricorrenza.



Esercizio 3. Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x}{(1+x^4)(e^y-1)}\,.$$

Soluzione.

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili e che non è definita per $y=0$. Cerchiamo quindi la soluzione con dato iniziale $y(x_0) = y_0 \neq 0$. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $e^y - 1$ e integrando in x, otteniamo

$$\int_{y_0}^{y(x)} (e^y - 1)\,dy = \int_{x_0}^{x} \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

da cui segue la soluzione in forma implicita

$$e^{y(x)} - y(x) = \frac{1}{2}\,\arctan(x^2) + c$$

dove c dipende da (x_0, y_0).

Mediante il metodo grafico possiamo ora disegnare qualitativamente le orbite delle soluzioni (se veda la figura in alto).

Osserviamo che tutte le soluzioni hanno asintoti orizzontali e, a seconda del valore della costante c, sono definite globalmente e sono funzioni pari della variabile x, oppure sono definite su una semiretta con $y(x) \to 0$ e $y'(x) \to \pm\infty$ per x che tende all'estremo della semiretta.