Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

11 gennaio 2016

Esercizio 1. Data una funzione $g \in L^2(\mathbb{R})$ con $g(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme di $L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$M_g = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \, : \, |f(x)| \leq g(x) \text{ per quasi ogni } x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Indichiamo con $p_g : L^2(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ il giogo del convesso M_g, definito da

$$p_g(f) := \inf \{ \lambda > 0 : \; f \in \lambda M_g \} \qquad \text{per ogni } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

i) Mostrare che M_g è un insieme chiuso e convesso.

ii) Dire se M_g è un insieme compatto nella topologia debole di $L^2(\mathbb{R})$.

iii) Dire se M_g è un insieme compatto nella topologia forte di $L^2(\mathbb{R})$.

iv) Mostrare che esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_{L^2} \leq C \, p_g(f)$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$.

v) Dire se esiste g tale che p_g è equivalente alla norma di $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Sia $I = (0, 1)$.

i) Mostrare che esiste $c < 1$ tale che $\|u\|_{L^2} \leq c \, \|u'\|_{L^2}$ per ogni $u \in H_0^1(I)$.

ii) Trovare la più piccola costante c per cui vale la precedente disuguaglianza.

Esercizio 3. Sia $I := (0, 1)$,

$$X := \{ w \in H^2(I) \cap H_0^1(I) : \; w' \in H_0^1(I) \}$$

e sia $a : \; X \times X \to \mathbb{R}$ la forma bilineare definita da

$$a(u, v) = \int_I (u'' v'' - u' v') \, dx.$$

i) Mostrare che a è simmetrica, continua e coerciva.

ii) Mostrare che, per ogni $f \in L^2(I)$, esiste un'unica $u_f \in X$ tale che

$$a(u_f, v) = \int_I f v \, dx \qquad \text{per ogni } v \in X.$$

iii) Mostrare che $u_f \in H^4(I)$ e che u_f soddisfa l'equazione $u_f^{(4)} + u_f'' = f$.

Soluzione esercizio 1.

i) Sia $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$ con $f_n \in M_g$, cioè $|f_n(x)| \le g(x)$ per quasi ogni x. A meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che $f_n \to f$ quasi ovunque e quindi $|f(x)| \le g(x)$ per quasi ogni x, cioè $f \in M_g$.
Siano ora $f, h \in M_g$ e $\lambda \in [0, 1]$. Per vedere che $\lambda f + (1-\lambda)h \in M_g$ è sufficiente osservare che $\lambda f(x) + (1-\lambda)h(x) \in [-g(x), g(x)]$ per quasi ogni x.

ii) M_g è un convesso chiuso e limitato, in quanto $f \in M_g$ implica $\|f\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2}$, pertanto M_g è compatto nella topologia debole di $L^2(\mathbb{R})$.

iii) M_g non è compatto nella topologia forte poiché la successione $f_n(x) = \sin(nx)g(x) \in M_g$ converge debolmente ma non fortemente a zero.

iv) Sia $C > \|g\|_{L^2}$. Per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|f\|_{L^2} = 1$ si ha che Cf non appartiene a M_g, cioè $p_g(Cf) = Cp_g(f) \ge 1 = \|f\|_{L^2}$. Per omogeneità si ottiene che $\|f\|_{L^2} \le Cp_g(f)$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$.

v) Sia $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $f_n(x) = \varepsilon$ se $x \in [n, n+1]$ e $f_n(x) = 0$ altrimenti. Chiaramente si ha $f_n \in B_\varepsilon \subset L^2(\mathbb{R})$ per ogni n, ma $f_n \notin M_g$ per n abbastanza grande. In particolare M_g non contiene nessuna palla B_ε e quindi p_g non è mai equivalente alla norma di $L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione esercizio 2.

i) Per ogni $x \in I$ si ha

$$u(x) = \int_0^x u' \le \|u'\|_{L^2}\sqrt{x}\,,$$

da cui si ottiene

$$\|u\|_{L^2} \le \|\sqrt{x}\|_{L^2}\,\|u'\|_{L^2} = \frac{\|u'\|_{L^2}}{\sqrt{2}}\,.$$

ii) Scrivendo una generica $u \in H_0^1(I)$ in serie di Fourier

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) \qquad x \in I\,,$$

si ha

$$\|u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \le \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 n^2 a_n^2 = \frac{1}{\pi^2}\,\|u'\|_{L^2}^2.$$

Per vedere che la disuguaglianza è ottimale è sufficiente considerare la funzione $u(x) = \sin(\pi x)$.

Soluzione esercizio 3.

i) Sia
$$X := \{w \in H^2(I) \cap H^1_0(I) : \, w' \in H^1_0(I)\}\,.$$
Definiamo la forma bilineare $a : \, X \times X \to \mathbb{R}$ definita da
$$a(u,v) = \int_I (u''v'' - u'v')\,dx.$$
Tale forma bilineare è chiaramente simmetrica e continua. Per vedere che è anche coerciva osserviamo che, grazie all'esercizio 2, si ha
$$a(u,u) = \int_I [(u'')^2 - (u')^2]\,dx \geq (1-c^2)\|u''\|^2_{L^2}.$$
Poiché, grazie alla disuguaglianza di Poincaré, la norma $\|u''\|_{L^2}$ è equivalente alla norma $\|u\|_{H^2}$ su X, si ottiene la coercività di a.

ii) Grazie al Teorema di Lax-Milgram, per ogni $f \in L^2(I)$ esiste un'unica funzione $u_f \in X$ tale che
$$a(u_f,v) = \int_I (u_f''v'' - u_f'v')\,dx = \int_I fv\,dx \qquad \text{per ogni } v \in X. \tag{1}$$

iii) Sappiamo che $u_f \in X$, quindi in particolare $u_f \in H^2(I)$. Presa $F \in H^2(I)$ tale che $F'' = f$, dall'uguaglianza precedente si ottiene
$$a(u_f,\phi) - \int_I f\phi\,dx = \int_I (u_f'' + u_f - F)\phi''\,dx = 0 \qquad \text{per ogni } \phi \in C^2_c(I)$$
e quindi, ponendo $\psi = \phi''$, si ottiene
$$\int_I (u_f'' + u_f - F)\psi\,dx = 0 \qquad \text{per ogni } \psi \in C^1_c(I) \text{ con } \int_I \psi\,dx = \int_I x\psi\,dx = 0\,.$$
Scegliamo ora $h,\, g \in C_c(I)$ tali che
$$\int h\,dx = \int xg\,dx = 1 \qquad \int xh\,dx = \int g\,dx = 0\,.$$
Per ogni $\phi \in C_c(I)$ si ha che
$$\psi = \phi - \left(\int_I \phi\,dx\right)h - \left(\int_I x\phi\,dx\right)g \in C_c(I)$$
verifica $\int_I \psi\,dx = \int_I x\psi\,dx = 0$. Ponendo
$$c = \int_I (u_f'' + u_f - F)h\,dx \qquad d = \int_I (u_f'' + u_f - F)h\,dx\,,$$
otteniamo
$$0 = \int_I (u_f'' + u_f - F)\psi\,dx = \int_I (u_f'' + u_f - F)\phi\,dx - \int_I (c + dx)\phi\,dx\,,$$
da cui segue che $u_f'' + u_f - F(x) = c + dx$. In particolare $u_f \in H^4(I)$.

L'equazione soddisfatta da u_f segue subito integrando per parti (1).