Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

12 settembre 2014

Esercizio 1. Si consideri l'operatore $T : \ell^2 \to \ell^2$ definito da

$$T(x)_n = x_{n^2} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostrare che T è un operatore lineare e continuo, e calcolarne la norma.

ii) Calcolare gli autovalori di T.

iii) Calcolare lo spettro di T.

Soluzione.

i) È immediato verificare che T è lineare e che $\|T(x)\|_{\ell^2} \leq \|x\|_{\ell^2}$ per ogni $x \in \ell^2$, quindi T è anche continuo con $\|T\| \leq 1$.

ii) Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ cerchiamo soluzioni $x \in \ell^2 \setminus \{0\}$ dell'equazione $x_{n^2} = \lambda x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Iterando questa relazione si ottengono le condizioni

$$x_{n^{2^k}} = \lambda^k x_n \qquad \text{per ogni } n, k \in \mathbb{N}.$$

Poiché $x \in \ell^2$, quindi in particolare $\lim_n x_n = 0$, otteniamo subito la condizione necessaria $\lambda \in [-1, 1]$.
Per $\lambda = 1$ una soluzione è data da $x_1 = 1$ e $x_n = 0$ altrimenti.
Per $\lambda \in (-1, 1)$ una soluzione è data da $x_{2^{2^k}} = \lambda^k$ per $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x_n = 0$ altrimenti.
Per $\lambda = -1$ non esistono soluzioni non banali.

iii) Poiché $\|T\| \leq 1$, sappiamo che $\sigma(T) \subset [-1, 1]$. Inoltre, dal punto precedente segue che $(-1, 1] \subset \sigma(T)$. Se mostriamo che $-1 \in \sigma(T)$, otteniamo l'uguaglianza $\sigma(T) = [-1, 1]$. Più precisamente mostreremo che l'operatore $T + Id$ non è surgettivo.
Dato $y \in \ell^2$ vogliamo risolvere la famiglia di equazioni $x_{n^2} + x_n = y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che sono equivalenti alle equazioni

$$x_{n^{2^k}} = (-1)^{k+1} x_n + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} y_{n^{2^j}} \qquad \text{per ogni } n, k \in \mathbb{N}.$$

Poiché $\lim_n x_n = 0$, tali equazioni sono risolubili solo se $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j y_{n^{2^j}} = 0$.

Esercizio 2. Dato $\alpha > 0$ si consideri l'operatore definito da

$$T(f)(x) = f(x^\alpha) \qquad f \in L^2(0,1).$$

i) Mostrare T_α manda $L^2(0,1)$ in $L^2(0,1)$ se e solo se $\alpha \leq 1$.

ii) Per $\alpha \leq 1$, mostrare che T è un operatore lineare e continuo da $L^2(0,1)$ in $L^2(0,1)$, e calcolarne la norma.

Soluzione.

i) Data $f \in L^2(0,1)$, la funzione $T(f)(x) = f(x^\alpha)$ appartiene a $L^2(0,1)$ se

$$\int_0^1 f^2(x^\alpha)dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 f^2(y)y^{\frac{1}{\alpha}-1}dy < +\infty.$$

Se $\alpha \leq 1$ si ottiene $T(f) \in L^2(0,1)$ e $\|T(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}/\sqrt{\alpha}$. Viceversa, se $\alpha > 1$ la funzione $f(x) = x^\beta$, con $2\beta \in (-1, -1/\alpha]$, appartiene a $L^2(0,1)$ mentre $T(f) \notin L^2(0,1)$.

ii) Dal punto precedente segue che T è un operatore lineare e continuo da $L^2(0,1)$ in $L^2(0,1)$ di norma minore o uguale a $1/\sqrt{\alpha}$. Sia ora f_n la funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } x \in [1-1/n, 1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che $\|f_n\|_{L^2} = 1$ e

$$\|T(f_n)\|^2_{L^2} = \frac{n}{\alpha}\int_{1-\frac{1}{n}}^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1}dy \geq \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Ne segue che $\lim_{n\to+\infty} \|T(f_n)\|_{L^2} = 1/\sqrt{\alpha}$ e quindi la norma di T è proprio $1/\sqrt{\alpha}$.

Esercizio 3. Sia X uno spazio di Banach e Y un sottospazio di X.

i) Mostrare che se Y è denso in X allora $Y^* = X^*$, nel senso che esiste un'isometria tra i due spazi.

ii) Dire se è vero anche il viceversa, cioè se l'uguaglianza $Y^* = X^*$ implica che Y è denso in X.

Soluzione.

i) Definiamo un'isometria tra Y^* e X^*. Data $f \in Y^*$, $x \in X$ e $y_n \in Y$ una successione tendente ad X, osserviamo che $f(y_n)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Si ha infatti $|f(y_n) - f(y_m)| \leq \|f\|_{Y^*} \|y_n - y_m\|_X$. Sia ora $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$. Osserviamo che $\tilde{f}(y) = f(y)$ per ogni $y \in Y$ e che $\tilde{f}$ non dipende dalla successione y_n convergente ad x. Inoltre la funzione $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ è lineare e si ha $\tilde{f}(x) \leq \|f\|_{Y^*} \|x\|_X$, quindi $\tilde{f} \in X^*$ con $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ e la mappa lineare $f \to \tilde{f}$ è un'isometria tra Y^* e X^*

ii) Il viceversa non è vero dato che $X = \ell^2$ è isometrico al suo sottospazio chiuso $Y = \{x \in \ell^2 : x_1 = 0\}$ e quindi si ha $X^* = Y^*$.