Esercizio 1 Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ iniettiva e di classe C^1. Dimostrare che

$$\mathcal{H}^1(\gamma([0,1])) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt.$$

E se γ è Lipschitziana?

Esercizio 2 Verificare che, se $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà k-dimensionale di classe C^1, allora Σ ha spazio tangente approssimato in ogni punto $x \in \Sigma$ e che esso coincide con il k-piano tangente ad x in Σ.

Esercizio 3 *Premessa:* per *k-grafico in $\mathbb{R}^n$* intendiamo il grafico $\{x + \phi(x) : x \in \pi\}$ di una funzione $\phi : \pi \to \pi^\perp$ definita su un sottospazio π di dimensione k di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrare che un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è k-rettificabile, cioé

esistono $N \subset \mathbb{R}^n$ e k-grafici Lipschitziani Γ_h in $\mathbb{R}^n$ tali che $\mathcal{H}^k(N) = 0$ e $E \subset N \cup \bigcup_{h=1}^{\infty} \Gamma_h$,

se e solo se E è C^1-k-rettificabile, cioé

esistono $N \subset \mathbb{R}^n$ e k-grafici Γ_h in $\mathbb{R}^n$ di classe C^1 tali che $\mathcal{H}^k(N) = 0$ e $E \subset N \cup \bigcup_{h=1}^{\infty} \Gamma_h$.

Suggerimento. Utilizzare questo risultato: esiste $C(k) > 0$ tale che, per ogni $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lipschitziana ed ogni $\epsilon > 0$, esiste $f_\epsilon : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) \neq f_\epsilon(x)\}) < \epsilon \quad \text{e} \quad |\nabla f_\epsilon| \leq C(k) Lip(f)\,,$$

dove $Lip(f)$ denota la costante di Lipschitz di f.

Esercizio 4 Dimostrare che un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è k-rettificabile se e solo se

esistono $N \subset \mathbb{R}^n$ e funzioni Lipschitz $\phi_h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ tali che $\mathcal{H}^k(N) = 0$ e $E \subset N \cup \bigcup_{h=1}^{\infty} \phi_h(\mathbb{R}^k)$.

Si dimostri anche che è equivalente richiedere che le mappe ϕ_h siano di classe C^1.

Esercizio 5 Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $E \subset I$ un insieme di perimetro finito in I. Dimostrare che E è equivalente ad un'unione finita di intervalli.

Esercizio 6 Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e siano E ed F due insiemi di perimetro finito in A. Dimostrare che

$$P(E \Delta F, A) \leq P(E, A) + P(F, A)\,.$$

Esercizio 7 Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in BV(\Omega)$ tale che $Du = 0$. Dimostrare che u è costante in Ω.

Esercizio 8 Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e due funzioni $u, v \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, dimostrare che

$$|D(uv)|(\Omega) \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}|Dv|(\Omega) + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}|Du|(\Omega).$$

Dedurre che $P(E \cap F, \Omega) \leq P(E, \Omega) + P(F, \Omega)$ e $P(E \cup F, \Omega) \leq P(E, \Omega) + P(F, \Omega)$ per ogni $E, F \subset \mathbb{R}^n$

Esercizio 9 Sia u una funzione in $BV(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto. Dimostrare che $Du(\mathbb{R}^n) = 0$.

Esercizio 10 Sia μ una misura di Radon su $\mathbb{R}^n$. Dato $r > 0$ siano $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $u(x) = \mu(\overline{B_r(x)})$, $v(x) = \mu(B_r(x))$. Mostrare che u è superiormente semicontinua e continua a destra mentre v è inferiormente semicontinua e continua a sinistra.

Esercizio 11 Sia μ_n una successione di misure di Radon in $\mathbb{R}^n$ tale che $\mu_n \rightharpoonup \mu$ per $n \to +\infty$, nella convergenza debole delle misure. Mostrare che, per ogni aperto Ω e per ogni compatto K, si ha

$$\mu(\Omega) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu_n(\Omega) \qquad\qquad \mu(K) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mu_n(K).$$

Si dimostri anche che, se E è un Boreliano tale che $\mu(\partial E) = 0$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(K)$.

Esercizio 12 Mostrare che un sottoinsieme convesso e limitato di $\mathbb{R}^n$ ha necessariamente perimetro finito.

Esercizio 13 Dati due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}^n$ di perimetro finito, con A convesso, mostrare che $P(A \cap B) \leq P(B)$.

Esercizio 14 Sia $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ una funzione che soddisfa $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = +\infty$. Mostrare che il funzionale

$$E \mapsto P(E) + \int_E g(x)\, dx$$

ammette minimo tra gli insiemi di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 15 Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito, tale che

$$\nu_E(y) = \frac{x - y}{|x - y|} \qquad \text{per } \mathcal{H}^{n-1}\text{-quasi ogni } y \in \partial^* E.$$

Mostrare che, se $E \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$, allora E è equivalente alla palla $B_r(x)$ per qualche $r > 0$.

Esercizio 16 Si dimostri la disuguaglianza isoperimetrica relativa: per ogni $t < \mathcal{L}^n(B(0,1))$ esiste $c(n,t) > 0$ tale che

$$\mathcal{L}^n(E) \le c(n,t) P(E, B(0,1))^{\frac{n}{n-1}} \quad \forall E \subset B(0,1) \text{ t.c. } \mathcal{L}^n(E) \le t\,.$$

Suggerimento: ragionare per assurdo e sfruttare il teorema di compattezza degli insiemi di perimetro finito.

Esercizio 17 Dimostrare la stima di localizzazione per funzioni a variazione limitata: dati $x \in \mathbb{R}^n$ ed $u \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e posto

$$u_r := u\,\chi_{B(x,r)}, \qquad m(r) := \int_{B(x,r)} |u(y)| dy\,,$$

si ha

$$|Du_r|(\mathbb{R}^n) \le |Du|(B(x,r)) + m'(r) \quad \text{per q.o. } r \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 18 Si dimostri la stima di localizzazione “esterna”: per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$ si ha, posto $m(r) := \mathcal{L}^n(E \cap B(x,r))$, che

$$P(E \setminus B(x,r), \mathbb{R}^n) \le P(E \setminus B(x,r), \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x,r)}) + m'(r) \quad \text{per q.o. } r \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 19 Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $g(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mostrare che, per ogni $m \in (0, \mathcal{L}^n(\Omega))$, il problema

$$\min\left\{ P(E,\Omega) + \int_{E\times E} g(|x-y|) \right\}$$

ammette minimo tra gli $E \subset \Omega$ di volume fissato pari ad m.

Esercizio 20 Siano $x \in \mathbb{R}^n$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro localmente finito. Dimostrare che l'insieme

$$\{r > 0 : P(E, \partial B(x,r)) > 0\}$$

ha cardinalità al più numerabile.

Esercizio 21 Sia $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona su un intervallo (a,b). Dimostrare che

$$|Du|\big((a,b)\big) = \left| \lim_{t\to b^-} f(t) - \lim_{t\to a^+} f(t) \right|\,.$$

Si caratterizzino gli *atomi* di $|Du|$, ovvero i punti $x \in (a,b)$ tali che $|Du|(\{x\}) > 0$.