COGNOME:	*NOME*:	*MATR.*:

ANALISI REALE E COMPLESSA 1^o appello — 30/1/2012

Facoltà di Ingegneria, Area dell'Informazione

E.1) Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$. Mostrare che la funzione

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

può essere estesa in $x = 0$ in modo da avere $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

E.2) Mostrare che la successione di funzioni $f_n(x) = x \sin(nx)$ è convergente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e calcolarne il limite. Dire se il risultato è vero anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

E.3) Data $c \in \mathbb{R}$ sia

$$f_c(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+c)} \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Classificare le singolarità di f_c e calcolare i residui.
Dire per quali valori di c l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)(x^2+c)}\, dx$$

è convergente e, nel caso, calcolarne il valore.

E.4) Risolvere, usando la trasformata di Fourier, il seguente problema ai dati iniziali

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) &= e^{-\pi x^2} \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

SOLUZIONI

E.1) Grazie alla Formula di Taylor, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^k + o(x^{n-1}) \right).$$

Dividendo entrambi i membri per x otteniamo

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^k + o(x^{n-1}) \qquad \text{per } x \neq 0\,.$$

Se poniamo $g(0) = f'(0)$ otteniamo quindi $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ con

$$g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \qquad \text{per ogni } n \geq 1\,.$$

E.2) Per ogni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\begin{aligned} |\langle f_n, v\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} x \sin(nx) v(x)\, dx \right| = \frac{1}{n} \left| \int_{\mathbb{R}} \cos(nx)(xv(x))'\, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \|(xv(x))'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\,, \end{aligned}$$

da cui segue $f_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Lo stesso argomento si applica a $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

E.3) Conviene distinguere tre casi:

a) $c \notin \{0, 1\}$. In questo caso f_c ha quattro poli semplici in $z = \pm i$ e $z = \pm\sqrt{-c}$. Osservare che $\sqrt{-c}$ può essere reale o immaginario a seconda che c sia rispettivamente negativo o positivo. Si ha quindi

$$\operatorname{res}(f_c, i) = \frac{e^{-1}}{2i(c-1)} \qquad \operatorname{res}(f_c, -i) = -\frac{e}{2i(c-1)}$$
$$\operatorname{res}(f_c, \sqrt{-c}) = -\frac{e^{i\sqrt{-c}}}{2\sqrt{-c}(c-1)} \qquad \operatorname{res}(f_c, -\sqrt{-c}) = \frac{e^{-i\sqrt{-c}}}{2\sqrt{-c}(c-1)}\,.$$

b) $c = 0$. In questo caso f_0 ha due poli semplici in $z = \pm i$ e un polo doppio in $z = 0$ e si ha

$$\operatorname{res}(f_0, i) = -\frac{e^{-1}}{2i} \qquad \operatorname{res}(f_0, -i) = \frac{e}{2i}$$
$$\operatorname{res}(f_0, 0) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{e^{iz}}{z^2+1} \right)' = \lim_{z\to 0} \frac{ie^{iz}(z^2+1) - 2ze^{iz}}{(z^2+1)^2} = i.$$

c) $c = 1$. In questo caso f_1 ha due poli doppi in $z = \pm i$ e si ha

$$\operatorname{res}(f_1, i) = \lim_{z\to i} \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right)' = \lim_{z\to i} \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{iz}}{(z+i)^4} = \frac{e^{-1}}{2i}$$
$$\operatorname{res}(f_1, -i) = \lim_{z\to -i} \left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right)' = \lim_{z\to -i} \frac{ie^{iz}(z-i)^2 - 2(z-i)e^{iz}}{(z-i)^4} = 0\,.$$

Osserviamo ora che l'integrale

$$I_c = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)(x^2+c)}\,dx$$

è convergente solo se $c > 0$ e in questo caso, grazie al Lemma di Jordan e al Teorema dei Residui, abbiamo

$$\begin{aligned} I_c &= 2\pi i\left(\mathrm{res}(f_c, i) + \mathrm{res}(f_c, i\sqrt{c})\right) = \pi\frac{\sqrt{c}\,e^{-1} - e^{-\sqrt{c}}}{\sqrt{c}(c-1)} \qquad \text{se } c \neq 1\,, \\ I_1 &= 2\pi i \mathrm{res}(f_c, i) = \pi e^{-1}\,. \end{aligned}$$

E.4) Passando alla trasformata di Fourier $\hat{u}$ il problema diventa

$$\begin{aligned} &\hat{u}_t(\lambda, t) = -\lambda^2\,\hat{u}(\lambda, t) && (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ &\hat{u}(\lambda, 0) = \widehat{e^{-\pi x^2}}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{4\pi}} && \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

da cui abbiamo

$$\hat{u}(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 \frac{1+4\pi t}{4\pi}} \qquad (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)\,.$$

Antitrasformando otteniamo

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi t}} e^{-\frac{\pi x^2}{1+4\pi t}} \qquad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)\,.$$